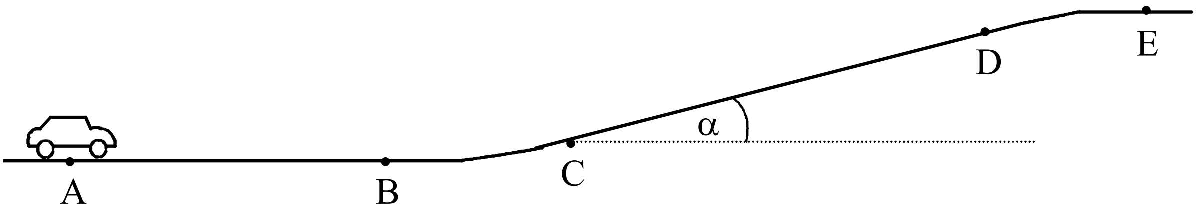
I

BE	

1.0



Ein Auto mit der Masse $m = 1{,}2\ \text{t}$ bewegt sich auf einer Fahrbahn, deren Profil in der obenstehenden Skizze dargestellt ist. Die Fahrbahn verläuft zunächst horizontal, ist zwischen den Punkten C und D um den Winkel $\alpha = 12^{\circ}$ gegen die Horizontale geneigt und verläuft ab dem Punkt E wieder horizontal.
Die Reibung im Getriebe und im Antrieb, der Luftwiderstand und die Rotationsenergie der Räder sind in den folgenden Aufgaben zu vernachlässigen.

5 1.1 Das Auto passiert den Punkt A zum Zeitpunkt $t_A = 0\ \text{s}$ mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $v_A = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Auf der geradlinigen Strecke [AB] mit der Länge $s_{AB} = 64\ \text{m}$ wird das Auto gleichmäßig auf eine Geschwindigkeit vom Betrag $v_B = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beschleunigt.
Berechnen Sie den Betrag a der Beschleunigung und den Zeitpunkt t_B, zu dem das Auto den Punkt B erreicht.

Es gilt:

$$2as_{AB} = v_B^2 - v_A^2$$

$$a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2s_{AB}}$$

$$a = \frac{\left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 64\,\text{m}} = \underline{\underline{2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Die benötigte Zeit berechnet am leichtesten aus der Formel:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} \qquad (t_A = 0)$$

$$a = \frac{v_B - v_A}{t_B}$$

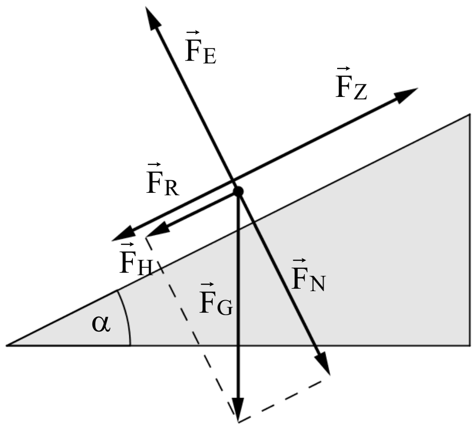
$$t_B = \frac{v_B - v_A}{a}$$

$$t_B = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{4{,}0\,\text{s}}}$$

1.2.0 Ab dem Zeitpunkt t_B übt der Motor eine Zugkraft aus, die so groß ist, dass der Betrag der Geschwindigkeit des Autos bis zum Punkt E konstant bleibt.
Die Reibungszahl für die Rollreibung zwischen den Autoreifen und der Fahrbahn beträgt $\mu = 0{,}020$.
Im Zeitintervall $[t_C; t_D]$ legt das Auto die geradlinige Strecke [CD] zurück.

4 1.2.1 Zeichnen Sie für einen Zeitpunkt t mit $t_C < t < t_D$ einen Kräfteplan, der alle Kräfte enthält, die auf das Auto wirken.

$\vec{F}_G$: Gewichtskraft
$\vec{F}_N$: Normalkraft
$\vec{F}_H$: Hangabtriebskraft
$\vec{F}_E$: Elast. Kraft d. Fahrbahn $\left(\vec{F}_E = -\vec{F}_N\right)$
$\vec{F}_R$: Reibungskraft
$\vec{F}_G$: Zugkraft



5 1.2.2 Berechnen Sie die mechanische Leistung, die der Motor im Zeitintervall $[t_C; t_D]$ abgibt.

Es gilt:
$F_a = F_Z - F_H - F_R$
Da sich aber der Körper mit konstanter Geschwindigkeit v_B bewegt, ist $a = 0$ und somit folgt:

$$0 = F_Z - F_H - F_R$$
$$F_Z = F_H + F_R$$
$$F_Z = F_H + \mu \cdot F_N$$
$$F_Z = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$$
$$F_Z = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

Für die mechanische Leistung folgt nun:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F_Z \cdot \Delta s}{\Delta t} = F_Z \cdot \underbrace{\tfrac{\Delta s}{\Delta t}}_{v_B} = F_Z \cdot v_B = mg \cdot v_B(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$P = 1{,}2 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\sin(12°) + 0{,}020 \cdot \cos(12°)\right) \approx \underline{\underline{54\,\text{kW}}}$$

6 | 1.3 Die Bremskraft, die maximal auf ein Auto ausgeübt werden kann, ist bestimmt durch die Haftreibungszahl für den Autoreifen auf der Fahrbahn. Ab dem Punkt E bewegt sich das Auto auf horizontaler Fahrbahn mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $v_E = 20\,\frac{m}{s}$.

Berechnen Sie die Länge s_{Br} des Bremsweges, den das Auto mindestens benötigen würde, um von dieser Geschwindigkeit in den Stillstand abzubremsen, wenn die Haftreibungszahl $\mu_H = 0{,}55$ beträgt.

Es gilt:

$$W_{Reib} = \Delta E_{kin}$$

$$F_{Reib} \cdot s_{Brems} = \tfrac{1}{2} m v_E^2 \qquad F_{Reib} = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G = \mu \cdot mg$$

$$\mu \cdot mg \cdot s_{Brems} = \tfrac{1}{2} m v_E^2$$

$$s_{Brems} = \frac{v_E^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(20\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 0{,}55 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} \approx \underline{\underline{37\,m}}$$

Oder auch so:

Da der Körper aufgrund der Reibung seine Geschwindigkeit verringert gilt:

$$F_a = -F_R$$

$$ma = -\mu mg$$

$$a = -\mu g$$

und außerdem:

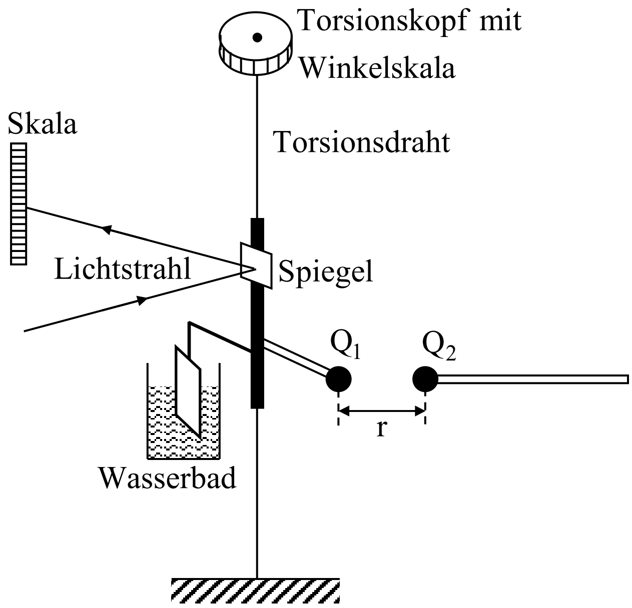
$$2ax = \underbrace{v^2}_{0} - v_E^2$$

$$x = \frac{-v_E^2}{2a} \overset{a=-\mu g}{=} \frac{-v_E^2}{-2\mu g} = \frac{v_E^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

2.0 Die Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes für elektrische Punktladungen soll experimentell bestätigt werden.

9 2.1 Beschreiben Sie anhand einer Skizze einen Versuchsaufbau, mit dem der Betrag der Coulombkräfte, die zwei kleine, elektrisch geladene Kugeln aufeinander ausüben, bestimmt werden kann.
Erläutern Sie die Funktionsweise der Versuchsanordnung.

Versuchsaufbau:
Zwischen zwei vertikal eingespannten Torsionsdrähten ist ein Drehkörper befestigt. Zur Beobachtung und Messung der Drehbewegungen ist am Drehkörper ein Spiegel angebracht, über den ein Lichtstrahl auf eine Skala abgebildet werden kann. Die Torsion der Drähte lässt sich durch Verdrehen einer mit einer Winkelskala versehenen Trommel an der oberen Befestigung verstellen. Der Drehkörper trägt einen waagrechten Isolierstab, an dessen Ende eine Metallkugel K_1 mit der Ladung Q_1 isoliert angebracht ist. In gleicher Höhe wie K_1 und in veränderbarem Abstand zu K_1 befindet sich eine isoliert aufgestellte, gleich große Metallkugel K_2 mit der Ladung Q_2. Am Stativ, das die Kugel K_2 trägt, ist ein Maßstab angebracht, mit dem die Entfernung r der Kugelmittelpunkte ermittelt werden kann.



Funktionsweise:
Zunächst sind die beiden Metallkugeln K_1 und K_2 ungeladen. Man markiert auf der Skala die Nulllage des Lichtzeigers. Die beiden Metallkugeln werden nun durch kurzzeitiges Verbinden mit einer Hochspannungsquelle oder durch Berühren mit einer durch Reibungselektrizität aufgeladenen dritten Metallkugel gleichnamig aufgeladen. Durch die elektrischen Kräfte stoßen sich die beiden Kugeln gegenseitig ab, und der Draht verdrillt sich soweit, bis Gleichgewicht herrscht zwischen abstoßender Coulombkraft und rückdrehender Torsionskraft. Zum möglichst schnellen Dämpfen und Einpendeln des Drehkörpers in diese Gleichgewichtslage dient eine am Drehkörper gefestigte Dämpfungsfahne, die in ein Wasserbad eingetaucht wird. Durch Drehen des Torsionskopfes wird die ursprüngliche Nulllage des Lichtzeigers wiederhergestellt. Die Metallkugel K_1 befindet sich damit wieder in ihrer Ausgangslage. Der Verdrehungswinkel α kann abgelesen werden und eine entsprechende Kraft F_{el} zugeordnet (umgerechnet) werden.

2.2.0 Ein Deuteriumkern $\left({}_1^2\mathrm{D}\right)$ und ein Tritiumkern $\left({}_1^3\mathrm{T}\right)$ haben jeweils die Ladung $Q_D = Q_T = +1e$, wobei e die Elementarladung ist. Die Masse eines Deuteriumkerns beträgt $m_D = 3{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg, die Masse eines Tritiumkerns $m_T = 5{,}01 \cdot 10^{-27}$ kg.
Die Kerne werden als kugelförmig angesehen.
F_{el} sei der Betrag der elektrischen Kraft, mit der sich ein Deuterium- und ein Tritiumkern in einer bestimmten Entfernung r (Mittelpunktsabstand) von einander abstoßen.
F_g sei der Betrag der Gravitationskraft, mit der sich die Kerne in dieser Entfernung r

gegenseitig anziehen.

4 2.2.1 Berechnen Sie das Verhältnis $F_{el} : F_g$ und begründen Sie anhand des Ergebnisses, dass die Gravitationskraft gegenüber der elektrischen Kraft vernachlässigbar ist.

$$\frac{F_{el}}{F_G} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q_D \cdot Q_T}{r^2}}{G \cdot \frac{m_D \cdot m_T}{r^2}} = \frac{Q_D \cdot Q_T}{4\pi\varepsilon_o \cdot G \cdot m_D \cdot m_T}$$

$$\frac{F_{el}}{F_G} = \frac{\left(1,602 \cdot 10^{-19}\ \text{As}\right)^2}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 3,34 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 5,01 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}$$

$$\frac{F_{el}}{F_G} = 2,07 \cdot 10^{35}$$

Somit folgt: $F_{el} = 2,07 \cdot 10^{35} \cdot F_G \quad \Rightarrow \quad F_{el} \gg F_G$ (unabhängig vom Abstand r)
Die Gewichtskraft F_G kann somit gegenüber der elektrischen Kraft F_{el} vernachlässigt werden.

Einheitenkontrolle:

$$\frac{(\text{As})^2}{\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \text{kg} \cdot \text{kg}} = \frac{\text{As}}{\frac{1}{\text{V}} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \text{kg}} = \frac{\text{VAs}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \text{kg}} = \frac{\text{J}}{\text{J}} = 1$$

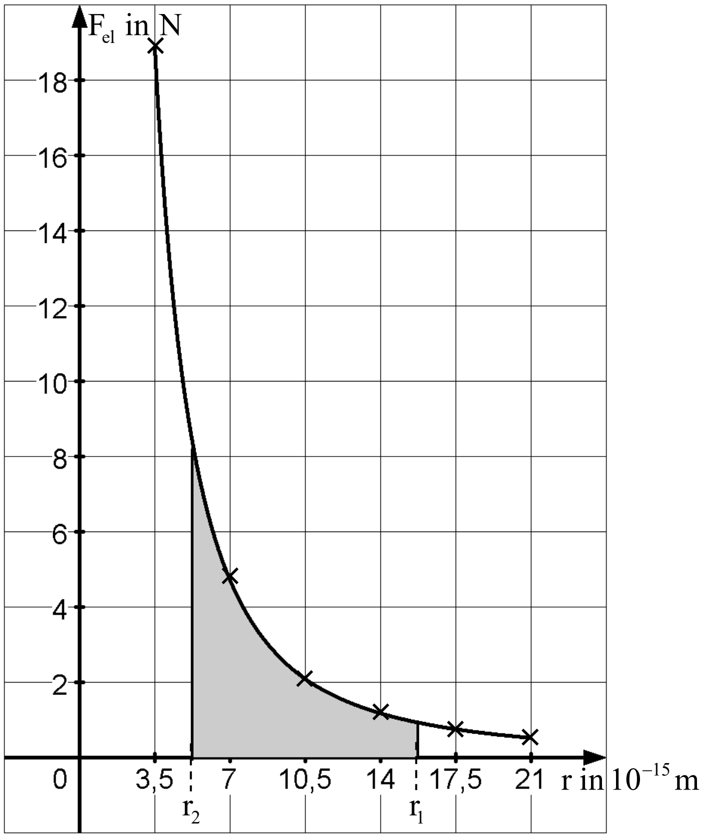
5 2.2.2 Stellen Sie die Abhängigkeit des Betrages F_{el} der elektrischen Abstoßungskraft von der Entfernung r der beiden Kerne in einer Gleichung mit eingesetzten Daten dar, und zeichnen Sie das zugehörige r-F_{el}-Diagramm für $3{,}5 \cdot 10^{-15}\,\text{m} \le r \le 21{,}0 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$.

Wählen Sie für die Wertetabelle die Schrittweite $\Delta r = 3{,}5 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$.

Maßstab: $2\,\text{N} \,\hat{=}\, 1\,\text{cm}$; $3{,}5 \cdot 10^{-15}\,\text{m} \,\hat{=}\, 1\,\text{cm}$

Es gilt: $F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q_D \cdot Q_T}{r^2} = \frac{\left(1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{As}\right)^2}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}} \cdot \frac{1}{r^2} = 2{,}31 \cdot 10^{-28}\,\text{Nm}^2 \cdot \frac{1}{r^2}$

r in 10^{-15} m	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5	21,0
F_{el} in N	18,9	4,7	2,1	1,2	0,8	0,5



2.3.0 Für die folgenden Teilaufgaben wird der Tritiumkern als ruhend angenommen. Der Deuteriumkern soll von einer Entfernung r_1 in eine Entfernung r_2 zum Tritiumkern gebracht werden, wobei $r_1, r_2 \in [3{,}5 \cdot 10^{-15}\,\text{m}\ ;\ 21{,}0 \cdot 10^{-15}\,\text{m}]$ und $r_2 < r_1$.
W_{12} ist die Verschiebungsarbeit, die dabei am Deuteriumkern verrichtet werden muss.

2 2.3.1 Kennzeichnen Sie im Diagramm von 2.2.2 die Verschiebungsarbeit W_{12}.

Siehe Diagramm von 2.2.2

3 2.3.2 Zeigen Sie, dass für die Verschiebungsarbeit W_{12} gilt: $W_{12} = -2{,}31 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{Jm} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

Für die Verschiebearbeit gilt:

$$W_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} F_{el}(r)\,dr$$

$$W_{12} = -2{,}31 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{Nm}^2 \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$W_{12} = -2{,}31 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{Nm}^2 \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$W_{12} = -2{,}31 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{Nm}^2 \cdot \left(-\frac{1}{r_2} - \left(-\frac{1}{r_1}\right)\right)$$

$$W_{12} = -2{,}31 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{Nm}^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Bemerkung: die Verschiebearbeit muss gegen die elektrische Abstoßungskraft F_{el} verrichtet werden, daher das Minuszeichen vor dem Integral!!

2.4.0 Eine Möglichkeit, Kernenergie zu nutzen, bietet sich mit der kontrollierten Kernverschmelzung (Kernfusion) von Deuterium und Tritium.

3 2.4.1 Bei dieser Kernfusion müssen Deuterium- und Tritiumkerne gegen die abstoßende elektrische Kraft auf die Entfernung $r_2 = r_D + r_T = 3{,}5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$, wobei r_D und r_T die Radien der beiden Kerne sind, zusammengebracht werden, damit sie dann unter dem Einfluss der Kernkräfte verschmelzen können.

Berechnen Sie mit Hilfe von 2.3.2 den Mindestwert der kinetischen Energie, den ein Deuteriumkern in sehr großer Entfernung zu dem als ruhend angenommenen Tritiumkern haben müsste, damit es zu einer Fusion der Kerne kommt.

Setzt man den Startpunkt des Deuteriumskerns ins Unendliche $(r_1 = \infty)$, der Endpunkt sei erreicht, wenn die beiden Kerne den Abstand r_2 besitzen, so folgt:

$$E_{Ges}(r_1 = \infty) = E_{Ges}(r_2)$$

$$E_{pot}(r_1) + E_{kin}(r_1) = E_{pot}(r_2) + \underbrace{E_{kin}(r_2)}_{\approx 0}$$

$$\underbrace{E_{kin}(r_1)}_{=E_{kin\,min}} = \underbrace{E_{pot}(r_2) - E_{pot}(r_1)}_{=\Delta E_{pot} = W_{12}}$$

$$E_{kin\,min} = W_{12}$$

$$E_{kin\,min} = -2{,}31 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{Nm}^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{mit } r_1 \to \infty$$

$$E_{kin\,min} = 2{,}31 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{Nm}^2 \cdot \frac{1}{r_2}$$

$$E_{kin\,min} = 2{,}31 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{Nm}^2 \cdot \frac{1}{3{,}5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}}$$

$$E_{kin\,min} = 6{,}6 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$$

4 2.4.2 Im Reaktor werden die Deuterium- und Tritiumkerne durch ein starkes Magnetfeld, das diese Kerne auf stark gekrümmte Bahnen lenkt, eingeschlossen.
Betrachtet wird ein Deuteriumkern, dessen Bahngeschwindigkeit senkrecht zu den magnetischen Feldlinien gerichtet ist und den Betrag $v = 1{,}1 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}$ besitzt.

Bestimmen Sie, wie groß der Betrag der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ sein muss, um den Deuteriumkern auf einem Kreisbogen mit dem Radius $r_K = 6{,}0\text{ mm}$ zu halten.

Der Deuteriumkern wird senkrecht zu den magnetischen Feldlinien in das Magnetfeld eingeschossen. Somit gilt:

$$F_L = F_Z$$

$$e \cdot v \cdot B = m_D \cdot \frac{v^2}{r_K}$$

$$B = \frac{m_D \cdot v}{e \cdot r_K}$$

$$B = \frac{3{,}34 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 1{,}1 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,As \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-3}\,m}$$

$$B = 3{,}8\,T$$

Einheitenkontrolle:

$$\frac{kg \cdot \frac{m}{s}}{As \cdot m} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{m}{s}}{As \cdot m \cdot \frac{m}{s}} = \frac{kg \cdot \frac{m^2}{s^2}}{A \cdot m^2} = \frac{J}{A \cdot m^2} = \frac{VAs}{A \cdot m^2} = \frac{Vs}{\cdot m^2} = T$$

50