

§ 9 Gravitation

9.1 Das geozentrische Weltbild:

- Aristoteles (384-312 v. Chr.) entwickelte die Sphärentheorie. Danach umschließen die feste Erde der Reihe nach die Sphären des Wasser, der Luft, des Feuers, des Mondes, des Merkurs, der Venus, der Sonne, des Mars, des Jupiter, des Saturn und der Fixsterne. Dabei drehen sich die Sphären von Sonne Mond und Planeten einmal täglich auf einer festen Kreisbahn und mit konstanter Geschwindigkeit um eine feste Achse. (Problem: Planetenbewegungen konnten so nicht hinreichend erklärt werden.)
- Ptolemäus (85-160 n. Chr.) schuf die Epizykeltheorie. Dabei bewegen sich die Planeten auf Kreisen („Epizykeln“), deren Mittelpunkte auf Kreisbahnen („Deferenten“) liegen.
- Tycho Brahe (1546-1601) ist der letzte bedeutende Verfechter des geozentrischen Weltbilds.

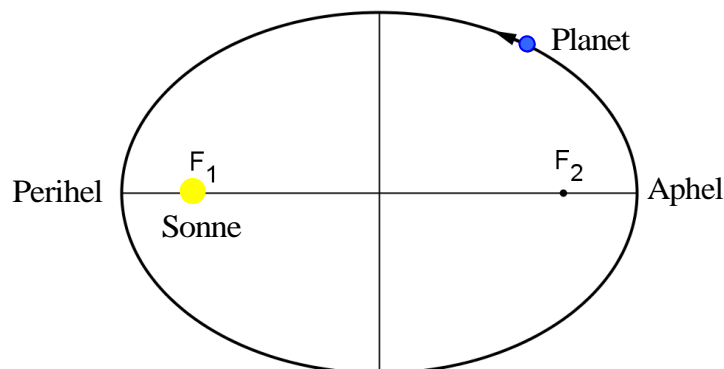
9.2 Das heliozentrische Weltbild:

- Der griechische Philosoph Aristarch (280 v. Chr.) hatte die revolutionäre Idee, dass die Sonne der Mittelpunkt des Weltsystems ist und die Erde sich um die Sonne bewegt. (Es gelangen ihm auch Abschätzungen über die Entfernungs- und Größenverhältnisse von Erde, Mond und Sonne)
- Nikolaus Kopernikus (1473-1543) hat das heliozentrische Weltbild neu begründet. Die Beschreibung der Planetenbewegung wurde dadurch stark vereinfacht. Trotzdem herrschte zwischen Rechnung und Beobachtung keine Übereinstimmung.
- Johannes Kepler (1571-1630) wertete die Messergebnisse von Tycho Brahe bezüglich der Marsbahn aus und folgerte, dass sich der Mars auf einer Ellipsenbahn um die Sonne bewegt. Des weiteren folgerte er noch weitere Gesetzmäßigkeiten (siehe später)
- Newton fand das Grundgesetz, das die Dynamik der Himmelsbewegung erklärt.
- Galileo Galilei (1564-1642) konnte mit Hilfe seiner Beobachtungen (durch ein Fernrohr) das heliozentrische Weltbild stützen und weitere Himmelsentdeckungen machen (Jupitermond, Phasenwechsel der Venus).

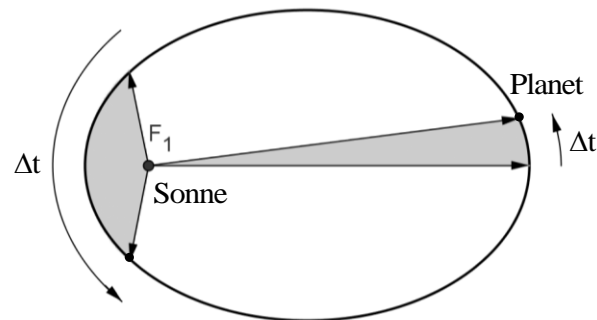
Die katholische Kirche kannte das heliozentrische Weltbild erst im Jahre 1992 an.

9.3 Die Kepler'schen Gesetze

1. Kepler'sche Gesetz: Die Planetenbahnen bewegen sich auf Ellipsen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.

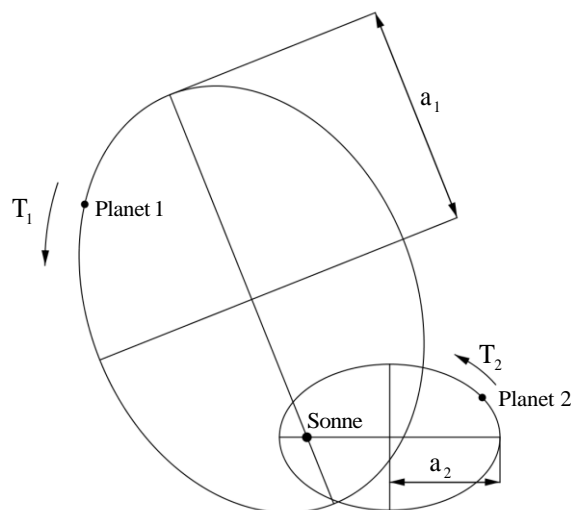


2. Kepler'sche Gesetz: Der von der Sonne zum Planeten gezogene Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleich Flächen. (Flächensatz)
 Folgerung: Im sonnennächsten Punkt (Perihel) bewegt sich ein Planet schneller als im sonnenfernsten Bahnpunkt (Aphel)



3. Kepler'sche Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten T zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhälften.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = C_s \text{ (Keplerkonstante)}$$



Berechne die Keplerkonstante für das System Sonne-Erde und das System Erde-Mond!

Sonne-Erde: $T = 365,26 \text{ d}$; $r = 1 \text{ AE} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$

$$C_s = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(365,26 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2}{(149,6 \cdot 10^9 \text{ m})^3} \approx 2,975 \cdot 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

Erde-Mond: $T = 27,3 \text{ d}$; $r = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$

$$C_E = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2}{(3,84 \cdot 10^8 \text{ m})^3} \approx 9,83 \cdot 10^{-14} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

Aufgaben:

1. Überprüfe die Gültigkeit des 3. Kepler'schen Gesetzes anhand der Daten folgender Tabelle

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter
Umlaufzeit T in d	87,97	224,70	365,26	686,98	4332,7
„Radius“ in 10^6 km	57,91	108,2	149,6	227,94	778,33
$C_s = \frac{T^2}{r^3}$ in $10^{-19} \frac{s^2}{m^3}$	2,975	2,975	2,975	2,9748	2,9720

Die Keplerkonstante C_s ist für alle Planeten in unserem Sonnensystem gleich groß.

2. Berechne die Umlaufdauer des Saturns, wenn dessen mittlerer Bahnradius $r_s = 9,54$ AE beträgt. (1 AE Astronomische Einheit ist die Entfernung der Erde von der Sonne und beträgt $149,6 \cdot 10^6$ km)

$$C_s = \frac{T^2}{r^3} \Rightarrow T^2 = C_s \cdot r^3$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{C_s \cdot r^3} = \sqrt{2,97 \cdot 10^{-19} \frac{s^2}{m^3} \cdot (9,54 \cdot 149,6 \cdot 10^9 m)^3} \approx 29,5 a$$

3. Berechne die Bahngeschwindigkeit des Pluto, wenn seine Umlaufdauer $T = 248$ a beträgt.

$$C_s = \frac{T^2}{r^3} \Rightarrow r^3 = \frac{T^2}{C_s} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{C_s}}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{T^2}{C_s}} \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt[3]{T \cdot C_s}}$$

$$v = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt[3]{248 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 s \cdot 2,97 \cdot 10^{-19} \frac{s^2}{m^3}}} \approx 4,74 \frac{km}{s}$$

9.4 Das Gravitationsgesetz

Betrachtet man nun die Bewegung der Erde um die Sonne und idealisiert deren Bahn nahezu als Kreisbahn, so wirkt auf die Erde eine Zentripetalkraft.

Es gilt also:

$$F_Z = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} mr \quad (1) \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Für die Umlaufdauer T folgt aus dem 3. Kepler'schen Gesetz:

$$\frac{T^2}{r^3} = C_s \Rightarrow T^2 = C_s \cdot r^3 \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein, so folgt:

$$F_Z = \frac{4\pi^2}{T^2} mr = \frac{4\pi^2}{C_s r^3} mr = \frac{4\pi^2}{C_s} \cdot \frac{m}{r^2} \quad (3)$$

Diese Kraft wird also vom Zentralgestirn (Sonne) auf den umkreisenden Körper (Erde) ausgeübt. Nach dem 3. Newton'schen Gesetz übt aber dieser eine ebenso große, aber entgegengerichtete Kraft auf das Zentralgestirn aus. Daraus schloss Newton, dass in der Gleichung der Kraft auch die Masse des Zentralgestirns enthalten sein muss. Dazu erweitert man die rechte Seite der Gleichung (3) mit der Masse M des Zentralgestirns.

$$F_Z = \frac{4\pi^2}{C_s \cdot M} \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Da die Zentripetalkraft bei der Planetenbewegung und die Kraft, die einen fallenden Stein beschleunigt die gleich Ursache haben (beide Körper ziehen sich auf Grund des Wechselwirkungsprinzip gegenseitig an), nennt man diese Kraft auch Gravitationskraft F_G . Es gilt:

$$\boxed{F_{Gr} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}} \quad (\text{Gravitationsgesetz von Newton (1686)})$$

mit der Gravitationskonstanten $G = \frac{4\pi^2}{C_s \cdot M} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Erst 70 Jahre nach Newtons Tod konnte Henry Cavendish (1731-1810) im Jahr 1798 experimentell die Gravitationskonstante ermitteln. (Cavendish-Drehwaage)

Newton berechnete allerdings zunächst die Zentralbeschleunigung a_M des Mondes auf seiner Bahn um die Erde.

$$a_M = r_{EM} \omega^2 = r_{EM} \frac{4\pi^2}{T_M^2} = 0,384403 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \frac{4\pi^2}{(27,32 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2} = 2,72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Das ist aber gerade der 3600ste Teil der Fallbeschleunigung, also

$$a_M = \frac{g}{3600} = \frac{1}{3600} g = \frac{r_E^2}{3600 r_E^2} g = \frac{r_E^2}{(60 r_E)^2} g = \frac{r_E^2}{r_{EM}^2} g$$

dabei ist r_{EM} der mittlere Abstand Erde-Mond.

Somit folgt:

$$F = ma_M = m \frac{r_E^2}{r_{EM}^2} g = r_E^2 g \cdot \frac{m}{r_{EM}^2}$$

Also:

$$F \sim \frac{m}{r^2}$$

was auch im Gravitationsgesetz schon gilt.

Verallgemeinerung des Gravitationsgesetzes auf beliebige Massen m_1 und m_2 im Abstand r (r ist dabei der Mittelpunktsabstand der Körper mit den Massen m_1 und m_2)

$$F_{12} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

\vec{F}_{12} ist die Kraft der Masse m_1 auf die Masse m_2 .

\vec{F}_{21} ist die Kraft der Masse m_2 auf die Masse m_1 (Gegenkraft).

9.5 Anwendung des Gravitationsgesetzes

9.5.1 Berechnung der Masse und der mittleren Dichte der Erde

Nachdem Cavendish die Gravitationskonstante G bestimmt hatte, konnte er auch die Erdmasse berechnen.

Die Gewichtskraft eines beliebigen Körpers auf der Erde ist gleich der Gravitationskraft, mit der die Erde diesen Körper auf der Erdoberfläche anzieht. Da die Erde als Massenpunkt betrachtet wird, ist der Erdradius der Abstand beider Körper.

Es gilt:

Gewichtskraft = Gravitationskraft

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m_E \cdot m}{r_E^2}$$
$$m_E = \frac{g \cdot r_E^2}{G} = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}} \approx \underline{\underline{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}}$$

Berechnung der mittleren Dichte:

$$\rho_E = \frac{m_E}{V_E} = \frac{m_E}{\frac{4}{3} r_E^3 \pi} = \frac{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^3 \pi} \approx 5,51 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 5,51 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

9.5.2 Berechnung der Masse der Sonne

Da die Bewegung der Erde um die Sonne nahezu eine Kreisbahn ist, muss auf die Erde eine Zentripetalkraft als resultierende Kraft wirken. Diese Zentripetalkraft wird durch die Gravitationskraft der Sonne erzeugt.

$$F_Z = F_{\text{Gr}}$$
$$m_E \omega^2 r_{\text{SE}} = G \frac{m_E m_S}{r_{\text{SE}}^2}$$
$$\frac{4\pi^2}{T^2} r_{\text{SE}} = G \frac{m_S}{r_{\text{SE}}^2}$$
$$m_S = \frac{4\pi^2 \cdot r_{\text{SE}}^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (149,6 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot (365,26 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2} \approx \underline{\underline{1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}}}$$

Bemerkung: Der Abstand Sonne-Erde kann aus dem 3. Kepler'schen Gesetz ermittelt werden, wenn die Umlaufdauer der Erde bekannt ist.

Kennt man nun die Masse der Sonne, so braucht man lediglich noch den Radius der Sonne um den Ortsfaktor der Sonne zu berechnen.

Der Sonnenradius beträgt $r_s = 695,8 \cdot 10^6 \text{ m}$

Gewichtskraft_{Sonne} = Gravitationskraft

$$m \cdot g_s = G \cdot \frac{m_s \cdot m}{r_s^2}$$
$$g_s = \frac{G \cdot m_s}{r_s^2} = \dots \approx 273 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Für die mittlere Dichte der Sonne folgt:

$$\bar{\rho}_S \approx 1,40 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

9.5.3 Satellitenbahnen

Welche Geschwindigkeit muss ein Satellit haben, damit er sich in einer Höhe h über der Erdoberfläche auf einer Kreisbahn bewegt.

$$\begin{aligned} F_Z &= F_{Gr} \\ m_s \frac{v^2}{r} &= G \frac{m_s m_E}{r^2} \\ v^2 &= \frac{G m_E}{r} & r &= r_E + h \\ v &= \sqrt{\frac{G m_E}{r_E + h}} \quad (1) \end{aligned}$$

Für seine Umlaufdauer folgt dann:

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r_E + h} \Rightarrow T = \frac{2\pi(r_E + h)}{v} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(r_E + h)^3}{G \cdot m_E}}$$

Satelliten, die sich jederzeit über dem gleichen Ort auf der Erde bewegen nennt man geostationäre Satelliten.

Diese befinden sich in der Äquatorebene, haben eine Umlaufdauer von $T = 24\text{h}$ und die gleiche Rotationsrichtung wie die Erde.

Welche Höhe gegenüber der Erdoberfläche haben diese Satelliten?

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(r_E + h)^3}{G \cdot m_E}} \Rightarrow \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{(r_E + h)^3}{G \cdot m_E} \Rightarrow (r_E + h)^3 = \frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2} \\ \Rightarrow h &= \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2}} - r_E = \dots \approx 35,9 \cdot 10^3 \text{ km} \end{aligned}$$

Seine Geschwindigkeit beträgt: $v = 3,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Würde man einen Satelliten an der Erdoberfläche kreisen lassen, so müsste dieser nach (1) mit $h \approx 0$ die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{G m_E}{r_E}} = \dots \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (2)$$

haben. Diese Geschwindigkeit nennt man auch die 1. kosmische Geschwindigkeit.

Zeige, dass für die 1. kosmische Geschwindigkeit auch gilt:

$$v = \sqrt{r_E g}$$

An der Erdoberfläche gilt:

Gewichtskraft = Gravitationskraft

$$m_s \cdot g = G \cdot \frac{m_E \cdot m_s}{r_E^2}$$
$$m_E = \frac{g \cdot r_E^2}{G} \quad (3)$$

Setzt man nun (3) in (2) ein, so folgt:

$$v = \sqrt{r_E g} \quad (1. \text{ kosmische Geschwindigkeit})$$

Oder auch (einfacher):

$$F_Z = F_G$$
$$m \frac{v^2}{r_E} = mg$$
$$v = \sqrt{r_E \cdot g}$$

Wie lange dauert es bis die Masse einmal um die Erde geflogen ist?

Ist $v \ll v_1 = \sqrt{rg}$, dann fällt der Flugkörper auf einer Parabelbahn zur Erde. Für $7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}} < v < 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ umkreist er die Erde auf einer Ellipsenbahn. Hat ein Flugkörper die Geschwindigkeit $v > 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, dann verlässt er auf einer Hyperbelbahn den Anziehungsbereich der Erde.

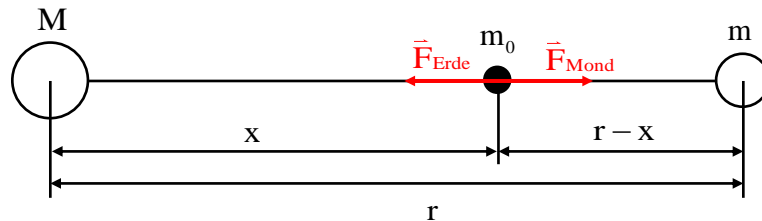
Die Geschwindigkeit $v_2 = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ heißt deshalb auch Fluchtgeschwindigkeit oder zweite kosmische Geschwindigkeit.

9.5.4 „Gravitationsfreier“ Punkt zwischen zwei Körper

Im Rahmen des Apollo-Programms war es Ziel der amerikanischen Raumfahrtbehörde NASA als erste Nation Menschen auf den Mond zu bringen.

Dazu musste aber eine Raumfähre auf ihrem Weg von der Erde zum Mond mindestens den Punkt erreichen ab dem dann die Anziehungskraft des Mondes größer als die Anziehungskraft der Erde ist.

In welcher Entfernung x von der Erde befindet sich der Punkt, in dem sich die Gravitationswirkungen, die beide Himmelskörper aufeinander ausüben, gerade aufheben? Diesen Punkt nennt man den „gravitationsfreien“ Punkt.



Für die Beträge der Kräfte im „gravitationsfreien“ Punkt gilt:

$$F_{\text{Erde}} = G \cdot \frac{M \cdot m_0}{x^2} \quad F_{\text{Mond}} = G \cdot \frac{m \cdot m_0}{(r - x)^2}$$

Da beide Kräfte gleich sein müssen, folgt somit:

$$\begin{aligned} F_{\text{Erde}} &= F_{\text{Mond}} \\ G \cdot \frac{M \cdot m_0}{x^2} &= G \cdot \frac{m \cdot m_0}{(r - x)^2} \\ M \cdot (r - x)^2 &= m \cdot x^2 \\ M \cdot (r^2 - 2rx + x^2) &= m \cdot x^2 \\ Mr^2 - 2Mrx + Mx^2 &= m \cdot x^2 \\ Mr^2 - 2Mrx + Mx^2 - m \cdot x^2 &= 0 \\ (M - m) \cdot x^2 - 2Mrx + Mr^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{\frac{1}{2}} &= \frac{2Mr \pm \sqrt{4M^2r^2 - 4Mr^2(M - m)}}{2 \cdot (M - m)} = \frac{2Mr \pm \sqrt{4M^2r^2 - 4M^2r^2 + 4Mmr^2}}{2 \cdot (M - m)} \\ &= \frac{2Mr \pm \sqrt{4Mmr^2}}{2 \cdot (M - m)} = \frac{2Mr \pm 2r\sqrt{Mm}}{2 \cdot (M - m)} = \frac{2r(M \pm \sqrt{Mm})}{2 \cdot (M - m)} = \frac{M \pm \sqrt{Mm}}{M - m} \cdot r \end{aligned}$$

Mit:

$$\text{Erdmasse: } M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\text{Mondmasse: } m = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$\text{mittlere Entfernung Erde - Mond } r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \pm \sqrt{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}}{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} - 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}} \cdot 3,84 \cdot 10^8 \text{ m} = \begin{cases} 4,32 \cdot 10^8 \text{ m} \\ 3,46 \cdot 10^8 \text{ m} \end{cases}$$

Die erste Lösung liefert einen Abstand, der größer ist als die mittlere Entfernung zwischen Erde und Mond. Somit liegt dieser Punkt rechts vom Mond. Hier sind zwar die Kräfte gleich groß aber auch beide gleich gerichtet.

Die zweite Lösung ist hier die gesuchte Lösung: Der „gravitationsfreie“ Punkt befindet sich also bei $x = 3,46 \cdot 10^8$ m, hier ist die resultierende Gravitationskraft, die auf den Probekörper wirkt null.

Der „gravitationsfreie“ Punkt befindet sich somit knapp 36300km über der Mondoberfläche und 340.000km über der Erdoberfläche.

Berechnen Sie den gravitationsfreien Punkte zwischen Sonne und Erde:

$$\text{Sonnenmasse: } M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$\text{Erdmasse: } m = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\text{mittlere Entfernung Sonne – Erde: } r = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \pm \sqrt{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}}{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} - 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}} \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m} = \begin{cases} (1,499 \cdot 10^{11} \text{ m}) \\ 1,493 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{cases}$$

Rechnerisch etwas schneller geht auch folgende Umformung:

$$\begin{aligned} F_{\text{Erde}} &= F_{\text{Mond}} \\ G \cdot \frac{M \cdot m_0}{x^2} &= G \cdot \frac{m \cdot m_0}{(r-x)^2} \\ M \cdot (r-x)^2 &= m \cdot x^2 \\ \frac{m}{M} &= \frac{(r-x)^2}{x^2} = \left(\frac{r-x}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x} - 1\right)^2 \\ \frac{r}{x} - 1 &= \pm \sqrt{\frac{m}{M}} \\ \frac{r}{x} &= 1 \pm \sqrt{\frac{m}{M}} \\ \frac{x}{r} &= \frac{1}{1 \pm \sqrt{\frac{m}{M}}} \\ x &= \frac{r}{1 \pm \sqrt{\frac{m}{M}}} \end{aligned}$$

Da hier nur die positive Lösung der quadratischen Gleichung physikalisch sinnvoll ist, lautet die Lösung:

$$x = \frac{r}{1 + \sqrt{\frac{m}{M}}}$$

Aufgaben:

4. Ein Wettersatellit soll die Erde in einem Tag genau 12-mal umkreisen. In welcher Höhe muss er fliegen?
($1,69 \cdot 10^3 \text{ km}$)
5. Welche Geschwindigkeit muss eine Mondfähre haben, wenn sie den Mond nahe der Mondoberfläche umkreisen soll?
($1,68 \frac{\text{km}}{\text{s}}$)
- 6.0 Während der Mondlandung der Landefähre umkreiste der Kommandoteil von Apollo 11 den Mond mit der Geschwindigkeit $1,63 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ im Abstand 110 km von der Mondoberfläche.
- 6.1 Berechne die Masse und die Dichte des Mondes.
($7,37 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $3,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)
- 6.2 Berechne die Höhe über dem Mondboden, in der die Gravitationskraft nur noch halb so groß ist wie an der Mondoberfläche.
(720 km)
- 7.0 Bei gewissen Neutronensternen (Sternüberreste aus extrem verdichteter Materie) konnte nachgewiesen werden, dass sie in einer Zeit von $T = 1,0 \text{ s}$ ein Mal um ihre Achse rotieren.
- 7.1 Berechnen Sie, welche Dichte ein solcher Stern mindestens haben muss, damit die Materie an seiner Oberfläche bei dieser schnellen Rotation nicht davonfliegt.

Es gilt:

$$F_Z = F_{\text{Gr}}$$
$$m\omega^2 r = G \frac{Mm}{r^2}$$
$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = G \frac{M}{r^2}$$

außerdem gilt für die Dichte des Planeten: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}r^3\pi} \Rightarrow M = \frac{4}{3}r^3\pi \cdot \rho$

nun oben wieder eingesetzt:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = G \frac{\frac{4}{3}r^3\pi \cdot \rho}{r^2}$$
$$\frac{\pi}{T^2} = G \cdot \frac{1}{3} \cdot \rho$$
$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$
$$\rho = \frac{3\pi}{6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot (1,0 \text{ s})^2} = 1,4 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- 8.0 Im Jahr 1999 wurde der Kleinplanet „Ida“ entdeckt. Seine Abmessungen betragen ca. $56\text{ km} \cdot 24\text{ km} \cdot 21\text{ km}$. Er wird von einem winzigen kugelförmigen Mond (Durchmesser $d_M = 1,5\text{ km}$) in einer Entfernung von $R = 100\text{ km}$ mit einer Umlaufzeit von $T = 22\text{ h}$ umrundet.
- 8.1 Berechnen Sie die Dichte des Kleinplaneten Ida und vergleichen Sie diese mit der Dichte des Mondes. Was lässt sich daraus folgern!?

Es gilt:

$$F_Z = F_{Gr}$$

$$m\omega^2 r = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = G \frac{M}{r^2}$$

außerdem gilt für die Dichte des Planeten: $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = V \cdot \rho$

nun oben wieder eingesetzt:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = G \frac{V \cdot \rho}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^3 = G \cdot V \cdot \rho$$

$$\rho = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{VGT^2}$$

$$\rho = \frac{4\pi^2 \cdot (100 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{(56 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 24 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot 21 \cdot 10^3 \text{ m}) \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot (22 \cdot 3600 \text{ s})^2} = 3,3 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- 9.0 Astronomen gehen heute davon aus, dass sich im Zentrum unserer Milchstraße ein schwarzes Loch befindet. Einer Forschungsgruppe gelang es, einen Stern auszumachen, der in einer Zeit von $T = 15\text{ a}$ um dieses Zentrum kreist. Die große Halbachse seiner Umlaufbahn beträgt in etwa $d = 0,013\text{ LJ}$ (Lichtjahre).
- 9.1 Berechnen Sie aus den Bahndaten dieses Sterns die Masse des schwarzen Lochs und vergleichen Sie diese mit unserer Sonnenmasse.
- 10.0 Im Frühjahr 2000 startete für 5 Jahre das Champ-Projekt. Ziel dieses Projektes ist es, mittels Satelliten die Geoidform der Erde auf einige Zentimeter genau zu bestimmen. Gleichzeitig werden auch Messungen zum Gravitations- und Magnetfeld sowie zum elektrischen Feld der Erde durchgeführt. Zu Beginn der Messungen wird der Satellit in eine Höhe von $h_1 = 470\text{ km}$ über der Erdoberfläche gebracht.
- 10.1 Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit v_1 des Satelliten in der Höhe h_1 .
- 10.2 Ermitteln Sie die Zeit T_1 , die der Satellit für eine volle Umrundung der Erde benötigt.
- 10.3.0 Durch die Reibung an der dünnen Atmosphäre verliert der Champ-Satellit immer mehr an Höhe. Dieser Höhenverlust schadet dem Projekt allerdings nicht. Nach 5 Jahren hat der Satellit immer noch eine Höhe von $h_2 = 300\text{ km}$.
- 10.3.1 Berechnen Sie für die neue Bahn die Bahngeschwindigkeit v_2 und die Umlaufzeit T_2 .
- 10.3.2 Vergleichen Sie die beiden Bahngeschwindigkeiten und finden Sie eine Erklärung für dieses Phänomen.

- 11.0 Das Hubble-Space-Teleskop umkreist die Erde in einer mittleren Höhe von $h = 593 \text{ km}$.
- 11.1 Berechnen Sie die Zeit T_{sid} (siderische Umlaufzeit) für eine vollständige Umrundung der Erde.
- 11.2 Ein Beobachter erblickt senkrecht über sich das Hubble-Space-Teleskop. Berechnen Sie die Zeit T_{syn} (synodische Umlaufzeit), die verstreicht bis der Beobachter den Satelliten erneut senkrecht über sich erblickt.
Hinweis: Die Erde benötigt für eine 360° -Drehung um ihre Achse eine Zeit von $T_E = 86.164 \text{ s}$. Das Teleskop hat die gleiche Drehrichtung wie die Erde und der Beobachter befindet sich in der Kreisbahnebene des Satelliten.