§ 4 Arbeit

Arbeit wird immer dann verrichtet, wenn ein Körper unter dem Einfluss einer äußeren Kraft längs eines Weges verschoben, beschleunigt oder verformt wird.

Für die Arbeit W, die von der Kraft längs eines Weges verrichtet wird gilt allgemein:

$$\boxed{W = \vec{F} \circ \vec{s}}$$

mit

$$[W] = 1 \cdot N \cdot m = 1 \cdot J \text{ (Joule)}$$

Geht man von den Vektoren zu den Beträgen über, so erhält man die Beziehung

$$W = F \cdot \Delta s$$

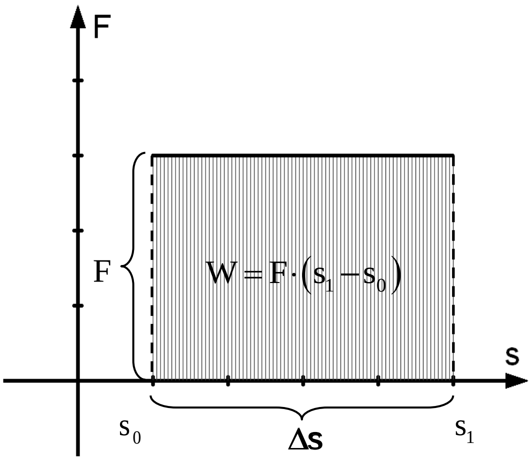
wenn gilt:

i) $\vec{F} \,||\, \vec{s}$

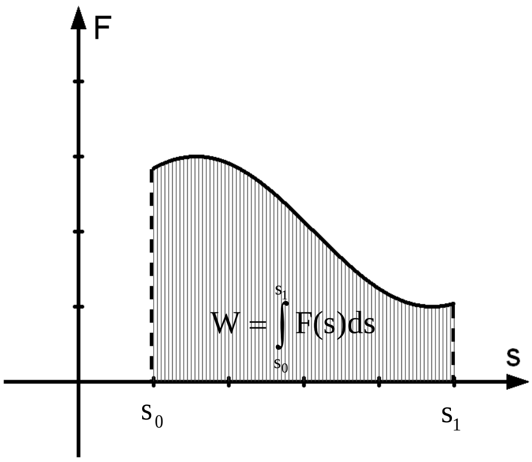
ii) $|\vec{F}| = \text{konst.}$

<u>Beachte</u>: $\vec{F} \perp \vec{s} \quad \Rightarrow \quad W = 0$ (siehe später!)

Trägt man die Kraft F gegen den Weg s in ein Koordinatensystem an, so entspricht die Fläche unter der Kraftkurve der Arbeit.

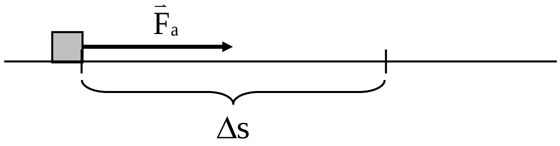


Dabei kann es auch sein, dass sich die Kraft entlang des Weges ändert.



Leider verlangt diese Flächenberechung mathematische Kenntnisse deren Behandlung erst später erfolgt. (→ Integralrechnung)
Im folgenden soll die Kraft F stets eine konstante Größe darstellen (sofern nichts anderes vermerkt ist).

Beschleunigungsarbeit



Für die Beschleunigungsarbeit gilt:

$$W_a = F_a \cdot \Delta s$$

Bei der beschleunigten Bewegung besteht zwischen der Beschleunigung und dem zurückgelegten Weg folgender Zusammenhang:

$$2a \cdot \Delta s = v^2 - v_0^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \qquad (1)$$

Somit folgt:

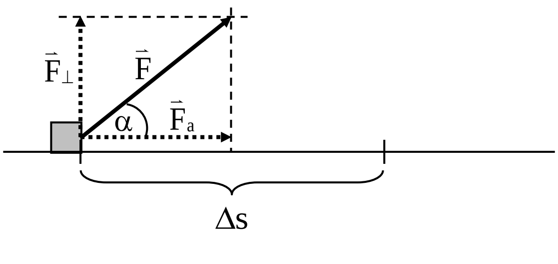
$$W_a = F_a \cdot \Delta s \overset{(1)}{=} m \cdot a \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \tfrac{1}{2} m \cdot \left(v^2 - v_0^2\right) = \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2$$

$$\boxed{W_a = \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2}$$

Diese Gleichung gilt für jede Beschleunigungsart ($a = \text{konst.}$).
W_a gibt die Arbeit an, die verrichtet werden muss, um einen Körper von der Geschwindigkeit v_0 auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen.
Für $v_0 = 0$ folgt:

$$\boxed{W_a = \tfrac{1}{2} mv^2}$$

Arbeit bei schräg angreifender Kraft



Die angreifende Kraft F schließt mit der Bewegungsrichtung den Winkel α ein.

Zur Berechnung der Arbeit zerlegt man zunächst die Kraft F in zwei zueinander senkrechte Komponenten.
F_a : Komponente der Kraft F, die in Bewegungsrichtung zeigt und für die Beschleunigung des Körpers verantwortlich ist.
$F_\perp$: Komponente der Kraft F, die senkrecht zur Bewegungsrichtung steht.

Für die Kraft F_a gilt:

$$\cos\alpha = \frac{F_a}{F} \quad \Rightarrow \quad F_a = F \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

Daraus ergibt sich für die mechanische Arbeit:

$$W_a = F_a \cdot \Delta s \overset{(2)}{=} F \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha$$

Vektoriell gesehen ist die Sache etwas einfacher, denn es gilt:

mit $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{F}; \vec{s}\right)$ $\quad \boxed{W = \vec{F} \circ \vec{s} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos\alpha = F \cdot s \cdot \cos\alpha}$

Wichtige Sonderfälle für den Winkel α:

1. Kraftrichtung und Bewegungsrichtung stimmen überein $(\alpha = 0°)$.
   Für die Beschleunigungsarbeit gilt:
   $$W_a = F \cdot s \cdot \cos(0°) = F \cdot s > 0$$
   Beispiele:
   - Beschleunigte Bewegung auf waagrechter Bahn
   - Freier Fall

2. Kraftrichtung und Bewegungsrichtung sind senkrecht zueinander gerichtet $(\alpha = 90°)$.
   Für die Beschleunigungsarbeit gilt:
   $$W_a = F \cdot s \cdot \cos(90°) = 0$$
   Beispiele:
   - Kreisbewegung (Die Zentripetalkraft steht senkrecht zur momentanen Bewegungsrichtung des Körpers)
     Die Zentripetalkraft erzwingt somit die Kreisbewegung, ohne Arbeit aufzubringen.
   - Tragen eines Koffers auf horizontaler Ebene (Im physikalischen Sinne wird hier keine Arbeit verrichtet).

3. Kraftrichtung und Bewegungsrichtung sind entgegengesetzt gerichtet $(\alpha = 180°)$.
   Für die Beschleunigungsarbeit gilt:
   $$W_a = F \cdot s \cdot \cos(180°) = -F \cdot s < 0$$
   Beispiele:
   - Senkrechter Wurf nach oben (Verzögerungsarbeit).
   - Abbremsen eines Fahrzeugs (Verzögerungsarbeit).

Allgemein gilt:

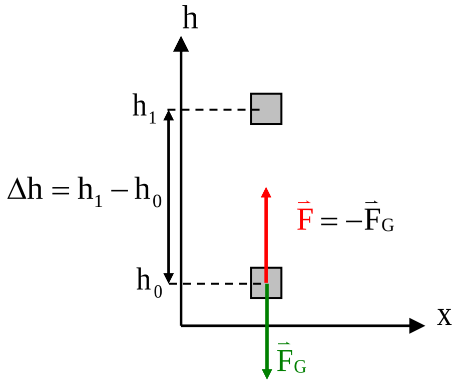
$W_a > 0$: Arbeit wird dem Körper von außen zugeführt.

$W_a < 0$: Arbeit wird vom Körper nach außen abgegeben.

Hubarbeit

Wird ein Körper der Masse m mit konstanter Geschwindigkeit (keine Beschleunigungsarbeit) von der Höhe h_0 senkrecht auf die Höhe h_1 emporgehoben, so muss die Kraft F die Gewichtskraft F_G kompensieren.
Für die Hubarbeit gilt somit:

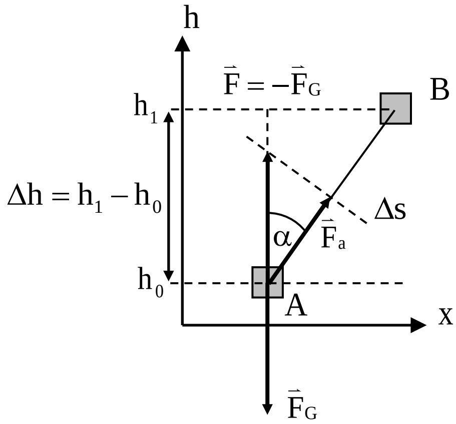
$$\boxed{W_{Hub} = \vec{F} \circ \vec{h} \overset{F=mg}{=} m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot (h_1 - h_0)}$$



Wird ein Köper (mit konstanter Geschwindigkeit) von der Position A in die Position B gehoben, so ist die für diese Bewegung nötige Kraft F gerade so groß um die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ zu kompensieren $\left(\vec{F} = -\vec{F}_G\right)$

Aus einer kleinen geometrische Vorüberlegung folgt:

$$\cos\alpha = \frac{\Delta h}{\Delta s} \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{\Delta h}{\cos\alpha} \qquad (1)$$



Somit erhält man für die Hubarbeit:

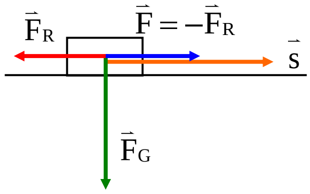
$$W_{Hub} = \vec{F} \circ \vec{s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha = F \cdot \frac{\Delta h}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = F \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot \Delta h$$

Ergebnis:
Die Arbeit, die gegen die Gewichtskraft verrichtet werden muss, ist also unabhängig vom Weg, auf dem die Höhenänderung erfolgt.

Reibungsarbeit

Wird ein Körper bewegt, muss in der Realität stets die Reibung mit überwunden werden. Damit ein Körper sich mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegt ist eine Kraft F notwendig, die entgegen der Reibungskraft wirkt.
Für die Reibungsarbeit gilt somit:

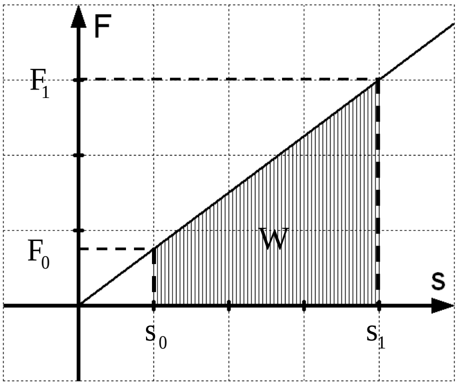
$$W_R = \vec{F} \circ \vec{s} = F \cdot \Delta s = F_R \cdot \Delta s = \mu \cdot F_N \cdot \Delta s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta s$$



Spannarbeit
Um eine Feder mit der Federkonstante D eine bestimme Strecke Δs zu dehnen, muss eine Kraft aufgewendet werden. Da die notwendige Kraft mit zunehmender Dehnung zunimmt, kann hier die Arbeit nicht mit Hilfe des Skalarprodukts berechnet werden.
Die Arbeit erhält man aus der Flächenberechnung im s-F-Diagramm.
Nach dem Gesetz von Hooke gilt für die zur Dehnung notwendige Kraft:

$$F = D \cdot \Delta s\,.$$

Dies ist eine lineare Funktion mit der Steigung D, deren Graph eine Gerade durch den Ursprung bildet.



$$W = \tfrac{1}{2} \cdot \left(s_1 \cdot F_1 - s_0 \cdot F_0\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(s_1 \cdot D \cdot s_1 - s_0 \cdot D \cdot s_0\right) = \tfrac{1}{2} \cdot D \cdot \left(s_1^2 - s_0^2\right)$$

$$\boxed{W_{Spann} = \tfrac{1}{2} \cdot D \cdot \left(s_1^2 - s_0^2\right)}$$

Volumenarbeit
Bei der Verbrennung von Gasen wird chemische Energie in mechanische Arbeit umgesetzt. Für diese gilt:

$$W_{Vol} = \vec{F} \circ \vec{s} = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$$

Wärmearbeit (keine mechanische Arbeit)
Wird ein Körper durch mechanische Arbeit erwärmt, so nimmt durch diese Arbeit seine Temperatur zu. Für die Wärmearbeit gilt:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

Die spezifische Wärmekapazität c ist hierbei eine Stoffkonstante, die angibt, wie viel Arbeit in Joule benötigt wird, um die Temperatur von 1 Gramm dieses Stoffes um 1°C zu erhöhen.

Aufgaben:

1.0 Ein Airbus A380 der Masse $m = 560\,t$ ist mit 4 Triebwerken von je $F_T = 347\,kN$ Schubkraft ausgestattet. Während der Fahrt auf der waagrechten Startbahn liefern die Triebwerke kontinuierlich die volle Schubkraft.

1.1 Welche Arbeit erbrachten die Triebwerke, wenn das Flugzeug nach einer Strecke von $x_S = 1,5\,km$ abhebt?

$$W_{Schub} = F_{Schub} \cdot s = 4 \cdot F_T \cdot s = 4 \cdot 347 \cdot 10^3\,N \cdot 1500\,m = 2,1 \cdot 10^9\,J = 2,1\,GJ$$

1.2 Wie groß ist die Endgeschwindigkeit v_E des Flugzeugs auf der Startbahn, wenn man die Reibungskräfte außer Acht lässt?

$$\begin{aligned} W_a &= W_{Schub} \\ \tfrac{1}{2} m\left(v^2 - v_0^2\right) &= W_{Schub} \\ \tfrac{1}{2} mv^2 &= W_{Schub} \\ v^2 &= \frac{2W_{Schub}}{m} \\ v &= \sqrt{\frac{2W_{Schub}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,1 \cdot 10^9\,J}{560 \cdot 10^3\,kg}} \approx 87\,\tfrac{m}{s} \quad \left(312\,\tfrac{km}{h}\right) \end{aligned}$$

2. Ein Kind zieht einen Leiterwagen mit dem konstanten Kraftaufwand von $F_Z = 150\,N$. Dabei wirkt eine Kraft in Richtung der Deichsel, die einen Winkel von $\alpha = 40,0°$ gegen die horizontale Straße bildet. Berechnen Sie, welche Arbeit das Kind verrichtet, wenn es den Wagen eine Strecke von $x_S = 0,750\,km$ weit zieht ?

$$W = F \cdot s = F_Z \cdot \cos\alpha \cdot x_S = 150\,N \cdot \cos 40,0° \cdot 750\,m \approx 86\,kJ$$

3.0 Ein Lastenaufzug befördert eine Last der Masse $m = 2,4\,t$ senkrecht nach oben und erteilt ihr während einer Zeit von $t_1 = 8,0\,s$ eine Beschleunigung von $a = 0,50\,\tfrac{m}{s^2}$.

3.1 Berechnen Sie die vom Aufzug bewältigte Hubarbeit?

Zunächst benötigt man die Höhe h:

Es gilt: $h(t) = \tfrac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; h(t_1) = \tfrac{1}{2} \cdot 0,50\,\tfrac{m}{s^2} \cdot (8,0\,s)^2 = 16\,m = h_1$

$$W_{Hub} = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot (h_1 - h_0) \overset{h_0=0}{=} m \cdot g \cdot h_1$$

$$W_{Hub} = 2,4 \cdot 10^3\,kg \cdot 9,81\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 16\,m = 376704\,J \approx 3,8 \cdot 10^5\,J$$

3.2 Berechnen Sie die vom Aufzug bewältigte Beschleunigungsarbeit?

Zunächst benötigt man die Endgeschwindigkeit:

Es gilt: $v(t) = a \cdot t \;\Rightarrow\; v(8,0\,s) = 0,50\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 8,0\,s = 4,0\,\tfrac{m}{s} = v_1$

$$W_a = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 \overset{v_0=0}{=} \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 10^3\,kg \cdot \left(4,0\,\tfrac{m}{s}\right)^2 = 19200\,J \approx 1,9 \cdot 10^4\,J$$

3.3 Welche Gesamtarbeit hat der Aufzug bewältigt?

$$W_{Ges} = W_{Hub} + W_a = 376704\,J + 19200\,J = 395904\,J \approx 4{,}0 \cdot 10^5\,J$$

4.0 Ein Roboter mit $m = 0{,}5\,t$ wird aus dem Stand längs der Strecke $x_0 = 2{,}0\,m$ mit der Beschleunigung $a = 0{,}10\,\frac{m}{s^2}$ bewegt.

4.1 Berechnen Sie, welche Arbeit der Roboter dabei verrichtet?

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2ax_0}$$

$$W_{Besch} = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m \cdot 2ax_0 = max_0 = 500\,kg \cdot 0{,}10\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 2{,}0\,m = 0{,}10\,kJ$$

4.2 Nun hebt der Roboter seinen Schwerpunkt dabei noch gleichzeitig um $x_S = 1{,}5\,m$. Berechnen Sie, welche Arbeit der Roboter nun verrichtet?

$$W = W_{Hub} + W_{Beschl} = mgx_S + max_0 = ... = 7357{,}5\,J + 100\,J \approx 7{,}5\,kJ$$

5.0 Ein Rammklotz zum Eintreiben von Spundwänden hat eine Masse von $m = 2500\,kg$. Er wird um $h = 4{,}50\,m$ angehoben und fällt dann frei auf das obere Ende der Spundwand.

5.1 Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit der Rammklotz kurz vorm Auftreffen auf die Spundwand hat?

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 9{,}4\,\tfrac{m}{s}$$

5.2 Ermitteln Sie, wie groß die mittlere Kraft ist mit der die Spundwand in den Boden gerammt wird, wenn die Wand pro Schlag um $s = 5{,}0\,cm$ tiefer in den Boden einsinkt?

$$W_{Beschl} = F \cdot s \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{mgh}{s} = ... \approx 2{,}2\,MN$$

6.0 Ein Junge $(m_J = 35\,kg)$ zieht einen Schlitten einen schneebedeckten Hang hinauf. Der Hang hat ein Länge von $\ell = 200\,m$ und bildet mit der Horizontalen einen Winkel von $\alpha = 20°$. Der Schlitten hat ein Masse von $m_S = 5{,}0\,kg$, die Reibungszahl beträgt $\mu = 0{,}10$.

6.1 Berechnen Sie, welche Arbeit der Junge aufwenden muss um den Schlitten hochzuziehen?

$$W_R = F_R \cdot s = \mu mg\ell \cos\alpha$$

$$W_{Hub} = mgh = mg\ell \sin\alpha$$

$$W_{Ges} = W_R + W_{Hub} = \mu mg\ell\cos\alpha + mg\ell\sin\alpha = mg\ell\left(\mu\cos\alpha + \sin\alpha\right) = ... \approx 4{,}3\,kJ$$

6.2 Der Junge setzt sich nun auf den Schlitten und fährt den Berg hinunter. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit er am Fuße des Berges ankommt?

$$v = \sqrt{2g\ell\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)} = ... \approx 31\,\tfrac{m}{s}$$