§ 37 Gewöhnliche Differentialgleichungen

37.1 Einführung und Definition einer Differentialgleichung, Beispiele

Die Schulmathematik hat sich bisher sehr ausgiebig mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigt. In diesen Gleichungen befand sich meist eine Variable x, die es galt zu bestimmen.

Beispiele:

Lineare Gleichung	$2x-3=-5$
Quadratische Gleichung	$\frac{1}{2}x^2-2x=5$
Kubische Gleichungen	$x^3-3x^2+2x=0$
Biquadratische Gleichungen	$2x^4-x^2+12=0$
Exponentialgleichungen	$e^{2x-3}=4$
Logarithmusgleichungen	$\ln\left(\frac{1}{2}x-5\right)=1$
Integralgleichungen	$\int_1^x\left(\frac{1}{4}t^2+t\right)dt=12$

Doch was passiert, wenn neben der Variablen x auch noch ein Funktionsterm und mindestens eine seiner Ableitungen vorkommt? Also z. Bsp.

$$f'(x)-x\cdot f(x)=2$$

Definition:
Jede Gleichung, die Ableitungen einer Funktion f enthält heißt Differentialgleichung (DGL).

Kommt in der Differentialgleichung lediglich die Ableitung nach einer Variablen vor, dann spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen (diese betrachten wir auch im Unterricht).
Kommen Ableitungen nach mehreren Variablen vor, dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen (diese werden dann im Studium behandelt!).

Bemerkung: Statt $f(x)$ verwendet man in einer Differentialgleichung (DGL) die Bezeichnung $y(x)$ oder einfach nur y. Und statt $f'(x)$ schreibt einfach nur y'.
Es gibt aber auch Funktionen, deren Variable nicht x sondern t ist, dann schreibt man statt $N(t)$ einfach nur N und für die Ableitung $\dot{N}(t)$ einfach nur $\dot{N}$.

Aus der Gleichung:

$$f'(x)-x\cdot f(x)=2$$

wird dann:

$$y'-x\cdot y=2$$

Und aus $\dot{N}(t)=-\lambda N(t)$ wird einfach nur $\dot{N}=-\lambda N$.

Ist die höchste vorkommende Ableitung von der Ordnung n, so nennt man sie eine Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Beispiele:

$y' - x \cdot y = 2$	Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung
$y' - x \cdot y'' = 2 \cdot y$	DGL 2. Ordnung
$y''' - x \cdot y'' = x \cdot y$	DGL 3. Ordnung

Wie man eine DGL löst wollen wir später erst behandeln. Die Verfahren dazu sind umfangreich und vielfältig.

37.2 Lösung einer Differentialgleichung; allgemeine und spezielle Lösung

Um zu entscheiden, ob ein Funktionsterm Lösung einer Differentialgleichung ist, setzt man diesen (samt seinen Ableitungen) in die Differentialgleichung ein. Erhält man (evtl. nach einigen Umformungen) eine wahre Aussage, dann stellt der Funktionsterm eine Lösung der Differentialgleichung dar.

Beispiele: Entscheiden Sie, ob die angegebene Funktion Lösung der DGL ist.

1.) $y' + y = 2e^x$ mit $y(x) = e^x + 2e^{-x}$

Es gilt: $y'(x) = e^x - 2e^{-x}$

$y(x)$ und $y'(x)$ nun in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} y' + y &= 2e^x \\ e^x - 2e^{-x} + e^x + 2e^{-x} &= 2e^x \\ 2e^x &= 2e^x \quad (w) \end{aligned}$$

Da man eine wahre Aussage erhält, ist $y(x) = e^x + 2e^{-x}$ eine Lösung der gegebenen DGL.

2.) $y' + y = 2e^x$ mit $y(x) = e^x + k \cdot e^{-x}$

Es gilt: $y'(x) = e^x - k \cdot e^{-x}$

$y(x)$ und $y'(x)$ nun in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} y' + y &= 2e^x \\ e^x - k \cdot e^{-x} + e^x + k \cdot e^{-x} &= 2e^x \\ 2e^x &= 2e^x \quad (w) \end{aligned}$$

Da man eine wahre Aussage erhält, ist $y(x) = e^x + k \cdot e^{-x}$ eine Lösung der gegebenen DGL.

In diesen beiden Beispielen hat man zwei verschiedene Funktionsterme, die beide Lösung der angegebenen DGL sind. Allerdings erkennt man auch, dass man für $k = 2$ die Lösung aus Beispiel 1 erhält.

Anmerkung:
Ein Funktionsterm mit Parameter, der sämtliche Lösungen einer Differentialgleichung beschreibt, heißt allgemeine Lösung der DGL.
Wählt man für den Parameter der allgemeinen Lösung einen konkreten Wert, so erhält man eine spezielle Lösung der DGL.

Aufgaben:

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen Lösung der DGL $y' - y = 1 - x$ ist.
   $y(x) = x + e^x$
   $y_A(x) = A \cdot x + e^x \quad \text{mit } A \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   $y_B(x) = x + B \cdot e^x$
   $y_C(x) = x + e^{C \cdot x} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen Lösung der DGL $y'' - y = -2e^{-x}$ ist.
   $y_A(x) = Ax \cdot e^{-x} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   $y_B(x) = x \cdot e^{-B \cdot x} \quad \text{mit } B \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   $y(x) = x \cdot e^{-x}$

3.0 Gegeben ist die DGL $y' = x \cdot y$ sowie die Bedingung $y(0) = 1$.
3.1 Entscheiden Sie, welche Steigung der Graph der Funktion y an der Stelle $x = 0$ besitzt.
3.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $y_C(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ eine Lösung der DGL ist und bestimmen Sie den Wert der Konstanten C.

4.0 Gegeben ist die DGL $y' = x + y$ sowie die Bedingung $y(1) = 1$.
4.1 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion y an der Stelle $x = 1$.
4.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $y_C(x) = C \cdot e^x - x - 1$ eine Lösung der DGL ist und bestimmen Sie den Wert der Konstanten C.

5. Nach anwenden der Kirchhoffschen Maschenregel erhält man beim Einschaltvorgang im RC-Kreis (bei Gleichspannung) die Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{C} \cdot Q + R \cdot \dot{Q} = U_0$$

Zeigen Sie, dass $Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ eine Lösung der DGL ist.

6. Nach anwenden der Kirchhoffschen Maschenregel erhält man beim Ausschaltvorgang im RC-Kreis (bei Gleichspannung) die Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{C} \cdot Q + R \cdot \dot{Q} = 0$$

Zeigen Sie, dass $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ eine Lösung der DGL ist.

7. Aus physikalischen Beobachtungen und theoretischen Annahmen weiß man, dass die Rate, mit der ein radioaktives Material zerfällt, direkt proportional zur Menge N des noch vorhandenen Materials ist. Daraus erhält man nun folgende DGL

$$\dot{N} = -\lambda \cdot N$$

mit der Zerfallskonstanten λ.
Zeigen Sie, dass $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ eine Lösung der DGL ist.

8. Bei der ungedämpften Schwingung (harmonische Schwingung) führt ein Kraftansatz auf folgende DGL:

$$F_{\text{Beschl.}} = F_{\text{Rück.}}$$
$$m \cdot a = -D \cdot x$$
$$m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = 0$$

Zeigen Sie, dass $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \rho_0)$ mit $A, \rho_0 \in \mathbb{R}_0^+$ eine Lösung der DGL ist und ermitteln Sie, welche Bedingung für ω, D und m gelten muss.
Lösen Sie das (Anfangs-)Problem, wenn man das Massestück mit Beginn der Zeitmessung aus der maximalen Dehnung loslässt.

Ergänzung „Gedämpfte Schwingung":
Berücksichtigt man, dass bei jedem realen Schwingungsvorgang Reibungsverluste auftreten, so wird dem schwingenden System Energie entzogen. Die Amplitude nimmt von Schwingung zu Schwingung ab. Geht man davon aus, dass die Reibungskraft linear von der Geschwindigkeit abhängt, so führt ein Kraftansatz auf folgende DGL:

$$F_{\text{Beschl.}} = F_{\text{Rück.}} + F_{\text{Reib.}}$$
$$m \cdot a = -D \cdot x - k \cdot v$$
$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + D \cdot x = 0$$

Für die Lösung bei schwacher Dämpfung gilt:

$$x(t) = A \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \rho_0) \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\tfrac{D}{m}}$$

Nun wollen wir uns aber der Aufgabe widmen, wie man selbst eine Differentialgleichung lösen kann. Die beiden „einfachsten" Fälle werden wir in der Schule erlernen, viele weitere Differentialgleichungen die gelöst werden wollen warten dann im Studium auf euch.

37.3 *Separierbare Differentialgleichungen*

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad\qquad y' = (1-x) \cdot (1+y^2)$$

heißt separabel und lässt sich durch die Methode „Trennung der Variablen" lösen.
Dabei ist $f(x)$ ein Funktionsterm, welcher lediglich die Variable x enthält und $g(y)$ ist ein (Funktions-)Term, welcher lediglich die Variable y enthält.
Obige DGL schreibt man zunächst in der Form:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = (1-x) \cdot (1+y^2)$$

Bringt man nun die y-Terme alle nach links und die x-Terme alle nach rechts (das nennt man „Trennung der Variablen") so folgt:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \qquad\qquad \frac{dy}{1+y^2} = (1-x) \cdot dx$$

mit $g(y) \neq 0$.
Nun werden die beiden Seiten unbestimmt integriert:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx \qquad\qquad \int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int (1-x) \cdot dx$$

und man erhält eine Gleichung mit y. Löst man diese nach y auf (was in den allermeisten Fällen auch möglich ist), dann erhält man die allgemeine Lösung der DGL $y' = f(x) \cdot g(y)$.
Möchte man eine spezielle Lösung der DGL, dann muss noch eine Bedingung (Rand- oder Anfangsbedingung) gegeben sein. Diese setzt man in die allgemeine Lösung der DGL ein und kann nun die Integrationskonstante eindeutig bestimmen.

Für das auf der „rechten“ Seite mitgeschleppte Beispiel folgt dann:

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int (1-x)\cdot dx$$
$$\arctan(y) = -\tfrac{1}{2}x^2 + x + c$$
$$y(x) = \tan\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + x + c\right)$$

Anmerkung: Da auf beiden Seiten ein Integral vorkommt, müsste eigentlich auch auf beiden Seiten der Gleichung eine Integrationskonstante stehe. Da man aber die dann wieder zusammenfassen kann, reicht es, wenn man letztendlich nur auf einer Seite eine Integrationskonstante hat.

Bestimmen Sie zunächst eine allgemeine Lösung der folgenden DGLen. Ermitteln Sie anschließend, mit Hilfe der angegebenen Bedingung, eine spezielle Lösung der DGL.

Beispiel 1: $y' = \frac{y}{x}$ mit $x > 0$

Diese DGL ist von der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(y) = y$.

Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \tfrac{1}{y}\,dy = \int \tfrac{1}{x}\,dx$$
$$\ln|y| = \ln|x| + c \qquad \text{da } x > 0$$
$$\ln|y| = \ln(x) + c$$
$$|y| = e^{\ln(x)+c}$$
$$|y| = x \cdot e^c$$
$$y(x) = C \cdot x \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Die allgemeine Lösung ist also von der Form $y = C \cdot x$, also alle Ursprungsgeraden.
Möchte man nun eine spezielle Lösung, dann muss eine Anfangsbedingung gegeben sein.
Zum Beispiel: $y(1) = 2$
Dies eingesetzt liefert: $C \cdot 1 = 2 \;\Rightarrow\; C = 2$
Die spezielle Lösung lautet somit: $y = 2x$

Beispiel 2: $y' = -\frac{y}{x}$; mit $x > 0$ und $y(2) = -1$

Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \tfrac{1}{y}\,dy = -\int \tfrac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c \qquad \text{da } x > 0$$

$$\ln|y| = \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) + c$$

$$|y| = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)+c}$$

$$|y| = \tfrac{1}{x} \cdot e^{c}$$

$$y(x) = C \cdot \tfrac{1}{x} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Die allgemeine Lösung ist also von der Form $y = C \cdot \frac{1}{x}$.

Die Bedingung: $y(2) = -1$

Liefert die Gleichung: $C \cdot \frac{1}{2} = -1 \;\Rightarrow\; C = -2$

Die spezielle Lösung lautet somit: $y(x) = -\frac{2}{x}$

Beispiel 3: $x + y \cdot y' = 0$; $y(0) = 2$

Lösung durch Trennung der Variablen

$$x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -x$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = \int -x \cdot dx$$

$$\left[\tfrac{1}{2} y^2\right] = \left[-\tfrac{1}{2} x^2\right]$$

$$\tfrac{1}{2} y^2 = -\tfrac{1}{2} x^2 + c$$

$$y^2 = 2c - x^2$$

$$y(x) = \pm\sqrt{2c - x^2}$$

$$y(0) = \pm\sqrt{2c} = 2 \;\Rightarrow\; 2c = 4 \;\Rightarrow\; c = 2$$

$y(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$ (Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius $r = 2$)

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden DGL mit dem angegebenen Anfangswert.
   a) $y' = e^{x-y}$; $\quad y(0) = 1$
   b) $y' = (y+1) \cdot \sin(x)$; $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$
   c) $x^2 \cdot y' = y^2$; $\quad y(1) = \frac{1}{2}$
   d) $x \cdot (x+1) \cdot y' = y$; $\quad$ mit $x > 0$ und $y(1) = \frac{1}{2}$

2002 AI

3 Zum Zeitpunkt $t=0$ besitzen die 80 Millionen Einwohner eines Staates 10 Millionen Handys. Die Anzahl der Handys, die in diesem Staat in Privatbesitz sind, wird durch den Funktionsterm $f(t)$ beschrieben, wobei t in Jahren gemessen wird.

3.1 Nach einem vereinfachten Modell gilt für die Anzahl der Handys in Privatbesitz in diesem Staat zum Zeitpunkt t, für $t \geq 0$, die Differenzialgleichung:

$$\dot{f}(t) = 0,2 \cdot \left[60 \cdot 10^6 - f(t)\right]$$

wobei $\dot{f}(t)$ die Ableitung von $f(t)$ nach der Zeit ist.

Leiten Sie aus dieser Differenzialgleichung den Funktionsterm $f(t)$ her.

3.2 Nun soll gelten: $f(t) = 60 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^6 e^{-0,2t}$.

Geben Sie an, welche konkrete Bedeutung die Zahl 60 Millionen in diesem Funktionsterm hat. Berechnen Sie den Zeitpunkt, $t \geq 0$, an dem 60% der Einwohner dieses Staates ein Handy besitzen, wobei angenommen wird, dass jeder Einwohner höchstens ein Handy hat.

2003 AI

2 Die chemische Verbindung Mixoflux zerfällt beim Erhitzen je nach Masse der Probe innerhalb einiger Minuten. Bei einem Versuch beträgt die Anfangsmasse der Probe an Mixoflux 1,00g, x sei die in der Zeit t (gemessen in Minuten) zerfallene Masse.

Die zugehörige Differenzialgleichung ist: $2 \cdot \dot{x} = (1+x) \cdot (1-x)$ mit $x \in [0;1[$. Dabei ist

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ die Ableitung der Funktion x nach der Variablen t.

2.1 Bestimmen Sie für die Funktion x einen Funktionsterm $x(t)$. Auf die Verwendung von Einheiten wird während der Rechnung verzichtet.

$\left(\text{Mögliches Ergebnis}: x(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}\right)$

2.2 Für einen „vollständigen Zerfall“ genügt es im Allgemeinen, wenn 99,9% der Anfangsmenge zerfallen sind. Nach welcher Zeit tritt dieses Ereignis ein?

2004 AI

2. Bestimmen Sie für $y > 2$ die Lösung der separierbaren DGL

$$2y' \cdot (x^4 + 16) + 6xy = 3xy^2$$

so, dass gilt: $y(0) = 4$.

2005 AI

3 Für die Zunahme der Population einer bestimmten Pflanzenart gilt die Differenzialgleichung:

$$\dot{N}(t) = 0,1 \cdot N(t) \cdot \left[5 - N(t)\right]$$

$N(t)$ erfasst hierbei die Anzahl der Pflanzen der Population zum Zeitpunkt t in 1000 für $t \geq 0$.

Dabei gilt: $0 < N(0) < 4,5$.

3.1 Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung für $N(0) = N_0$.

$$\left(\text{Mögliches Ergebnis}: N(t) = \frac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0,5t}}{5 - N_0 + N_0 \cdot e^{0,5t}}\right)$$

3.2 Berechnen Sie allgemein, auf welchen Endwert die Anzahl der Exemplare dieser Pflanzenart auf lange Sicht anwachsen wird und zu welchem Zeitpunkt t* 90 Prozent des Endwertes erreicht werden. Beschreiben Sie den Einfluss des Anfangswertes N_0 auf diesen Endwert.

2006 AI

2 Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Körpers im freien Fall mit turbulenter Luftreibung kann durch folgende Differenzialgleichung beschrieben werden: $\frac{c^2}{g} \cdot \dot{v} = c^2 - v^2$. Dabei ist g die konstante Fallbeschleunigung und c eine Konstante, die von der Masse und der Form des Körpers sowie von der Dichte der Luft abhängt, c und g sind positiv.

2.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $v(t)$ für $t \geq 0$ unter der Voraussetzung $v(0) = 0$. Dabei darf vorausgesetzt werden, dass stets gilt: $0 \leq v < c$.

$$\left(\text{Ergebnis}: v(t) = c \cdot \frac{e^{\frac{2g}{c} \cdot t} - 1}{e^{\frac{2g}{c} \cdot t} + 1}\right)$$

2.2 Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ und schließen Sie daraus auf die physikalische Bedeutung der Konstanten c.

2006 AII

3 Beim radioaktiven Zerfall von Uran entsteht Helium. Die zeitabhängige Masse $m(t)$ des Heliums zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $m(t=0) = 0$ erfüllt die Differenzialgleichung

$$\dot{m}(t) = \left(\tfrac{4m_0}{235} - m(t)\right) \cdot \lambda \quad .$$

Dabei ist λ die Zerfallskonstante, m_0 ist die Masse des Urans zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\dot{m}(t)$ ist die Ableitung von $m(t)$ nach der Zeit.

3.1 Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

$$\left(\text{Ergebnis}: m(t) = \frac{4m_0}{235} \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)\right)$$

3.2 Ermitteln Sie das Verhalten von $m(t)$ für $t \to \infty$. Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert für den beschriebenen Zerfallsvorgang.

2007 AI

3 Bei einer chemischen Reaktion vereinigt sich ein Molekül A mit einem Molekül B zu einem neuen Molekül AB. In einem Laborversuch sind zu Beginn der Reaktion von beiden Molekülarten jeweils M Moleküle vorhanden. Die Umsatzvariable $N(t)$ beschreibt die Anzahl der neuen Moleküle zum Zeitpunkt t $(t \geq 0)$. Für $N(t)$ gilt in guter Näherung die Differenzialgleichung

$$\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot \left(M - N(t)\right)^2,$$

wobei $k > 0$ eine Konstante ist.

3.1 Ermitteln Sie die spezielle Lösung der separierbaren Differenzialgleichung für $N(0) = 0$.

$\left(\text{Mögliches Ergebnis}: N(t) = \dfrac{k \cdot M^2 \cdot t}{k \cdot M \cdot t + 1}\right)$

3.2 Berechnen Sie in Abhängigkeit von k und M, zu welchem Zeitpunkt t^* $N(t)$ 99% des Endwertes erreicht hat.

ENDE LEHRPLANERFÜLLUNG!!!

37.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung (nicht mehr im Lehrplan!!)

<u>Definition</u>: Eine DGL 1. Ordnung heißt linear, wenn sie in der Form

$$y' + h(x)\cdot y = g(x)$$

darstellbar ist.

Die Funktion $g(x)$ wird dabei als Störglied oder Störfunktion bezeichnet.
Ist $g(x)\equiv 0$, so heißt die lineare DGL $y' + h(x)\cdot y = 0$ homogen, ansonsten inhomogen.

Anmerkung: Kennzeichen einer linearen DGL 1.Ordnung sind:

1. y und y' treten linear, d.h. in 1. Potenz auf.
2. Ein „gemischtes Produkt“ $y\cdot y'$ kann nicht vorkommen.

Wie nun so eine inhomogene DGL 1. Ordnung gelöst wird wollen wir an einem Beispiel zeigen. Bei der Lösung sind drei wesentliche Schritte nötig.
Beispiel: Lösen Sie für $x>0$ und alle $y\neq 0$ die Differentialgleichung

$$y' + \tfrac{1}{x}\cdot y = x^2+4$$

Es gilt hier also: $h(x)=\tfrac{1}{x}$ und $g(x)=x^2+4$

1. Schritt: Lösen der homogenen linearen DGL $y' + \tfrac{1}{x}\cdot y = 0$ durch Trennung der Variablen (hier wird also $g(x)\equiv 0$ gesetzt!).

$$\begin{aligned}
y' + \tfrac{1}{x}\cdot y &= 0 && \mid -\tfrac{1}{x}\cdot y\\
\tfrac{dy}{dx} &= -\tfrac{1}{x}\cdot y && \mid \cdot dx \mid : y \quad (y\neq 0)\\
\tfrac{1}{y}\,dy &= -\tfrac{1}{x}\,dx && \mid \int\\
\int \tfrac{1}{y}\,dy &= -\int \tfrac{1}{x}\,dx && \mid x>0\\
\ln|y| &= -\ln(x)+c && \mid e^{(\ldots)}\\
|y| &= e^{c-\ln(x)}\\
|y| &= e^{c}\cdot e^{-\ln(x)}\\
|y| &= e^{c}\cdot e^{\ln(x^{-1})}\\
|y| &= e^{c}\cdot (x^{-1})\\
|y| &= e^{c}\cdot \tfrac{1}{x}\\
y &= C\cdot \tfrac{1}{x} && C\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Die so erhaltene Lösung ist die Lösung der homogenen DGL:

$$y_h(x)=C\cdot\tfrac{1}{x} \text{ mit } k\in\mathbb{R}$$

2. Schritt: Lösen der inhomogenen DGL $y' + \tfrac{1}{x}\cdot y = x^2+4$ durch Variation der Konstanten. Dazu ersetzt man in der homogenen Lösung y_h die Integrationskonstante C durch eine (noch unbekannte) Funktion $C(x)$ und erhält den Lösungsansatz:

$$y(x)=C(x)\cdot\tfrac{1}{x}$$

Bildet man nun die Ableitung (unter Verwendung der Ableitungsregeln), so erhält man:

$$y' = C'(x)\cdot\tfrac{1}{x} + C(x)\cdot\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = C'(x)\cdot\tfrac{1}{x} - C(x)\cdot\tfrac{1}{x^2}$$

Nun setzt man für y und y' die entsprechenden Terme in die inhomogene DGL ein:

$$C'(x)\cdot\tfrac{1}{x}\underbrace{-C(x)\cdot\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{x}\cdot C(x)\cdot\tfrac{1}{x}}_{=0} = x^2 + 4$$

$$C'(x)\cdot\tfrac{1}{x} = x^2 + 4 \qquad |\cdot x$$

$$C'(x) = x^3 + 4x$$

Mittels Integration kann man die Funktion $C(x)$ ermitteln (und da können dann schon mal die Integrationsmethoden wieder ins Spiel kommen!).

$$C'(x) = x^3 + 4x$$

$$C(x) = \int\left(x^3 + 4x\right)dx$$

$$C(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 + k$$

Hier setzt man einfach $k = 0$ und erhält <u>eine</u> spezielle Lösung:

$$y_s(x) = \left(\tfrac{1}{4}x^4 + 2x^2\right)\cdot\tfrac{1}{x} = \tfrac{1}{4}x^3 + 2x$$

3. Schritt: Für die allgemeine Lösung erhält man dann $\left(y_a = y_h + y_s\right)$:

$$y_a(x) = C\cdot\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{4}x^3 + 2x$$

mit der Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$.

Bei gegebenem Anfangswert würde man noch die Integrationskonstante C bestimmen können.

Ein weiteres Beispiel:

1998 AI

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$xy' + y - x\cdot\cos(x) = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}^+$ mittels der Methode der Variation der Konstanten.

Zunächst formt man diese DGL etwas um und erhält:

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$$

1. Schritt: Lösen der homogenen linearen DGL $y' + \frac{y}{x} = 0$ durch Trennung der Variablen.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|y| = -\ln|x| + c_1$$
$$y = e^{c-\ln|x|}$$
$$y = \underbrace{e^c}_{C} \cdot e^{-\ln|x|}$$
$$y = C \cdot e^{\ln\frac{1}{|x|}}$$
$$y = C \cdot \tfrac{1}{x}$$

$\Rightarrow \quad y_h(x) = C \cdot \tfrac{1}{x}$ (Lösung der homogenen DGL)

2. Schritt: Lösen der inhomogenen DGL $y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$ durch Variation der Konstanten.

Ansatz:

$$y(x) = C(x) \cdot \tfrac{1}{x}$$

Ableitung:

$$y'(x) = C'(x) \cdot \tfrac{1}{x} + C(x) \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = C'(x) \cdot \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^2} \cdot C(x)$$

In DGL einsetzen:

$$C'(x) \cdot \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^2} \cdot C(x) + C(x) \cdot \tfrac{1}{x} \cdot \tfrac{1}{x} = \cos(x)$$
$$C'(x) \cdot \tfrac{1}{x} = \cos(x)$$
$$C'(x) = x \cdot \cos(x)$$
$$C(x) = \int x \cdot \cos(x)\,dx$$

Das Integral wird durch partielle Integration gelöst:

$$C(x) = \int x \cdot \cos(x)\,dx = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + k$$

Nun setzt man einfach $k = 0$ und erhält eine spezielle Lösung:

$$y_s(x) = \left(x \cdot \sin(x) + \cos(x)\right) \cdot \tfrac{1}{x} = \sin(x) + \tfrac{1}{x} \cdot \cos(x)$$

3. Schritt: Für die allgemeine Lösung erhält man dann $(y_a = y_h + y_s)$:

$$y_a(x) = C \cdot \tfrac{1}{x} + \sin(x) + \tfrac{1}{x} \cdot \cos(x) = \sin(x) + \tfrac{1}{x} \cdot \left(C + \cos(x)\right)$$

mit der Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$.

Da ist schon einiges zu tun, man muss sich das „Lösungsschema“ merken und man hat im zweiten Teil meist auch ein etwas komplizierteres Integral zu lösen.

Aufgaben:
1998 AII
2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$y' + 2y - \sin(2x) = 0$$
mit $x \in \mathbb{R}$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

1999 AI
2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$y' - \frac{2xy}{x^2+1} = x^2 - 1$$
mit $x \in \mathbb{R}$ mittels der Methode der Variation der Konstanten.

1999 AII
2. Bestimmen Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$-(1+x)^2 \cdot y' + y = (2x+2) \cdot e^{-\frac{1}{x+1}}$$
mittels der Methode der Variation der Konstanten.

2000 AI
3 Eine Metallkugel befindet sich in einer mit Öl gefüllten senkrechten Röhre. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Kugel aus der Ruhelage losgelassen und fällt in der Röhre nach unten. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der Kugel zum Zeitpunkt t, $t > 0$ gilt folgende Differenzialgleichung:
$$k \cdot v' + v = g \cdot b\,.$$
Dabei bedeuten g die Maßzahl der Erdbeschleunigung und k, b > 0 Konstanten, die von der Größe und Dichte der Kugel und der Viskosität und Dichte des Öls abhängen.

3.1 Bestimmen Sie $v(t)$ mit der Methode der Variation der Konstanten.
$$\left[\text{Ergebnis}: v(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)\right]$$

3.2 Ermitteln Sie das Verhalten von $v(t)$ für $t \to \infty$, und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

2000 AII
3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$y' + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x \cdot (x+2)}$$
mit $x \in \mathbb{R}^+$ mittels der Methode der Variation der Konstanten.

2001 AI
3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$y' + y \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = e^{\cos(x)}$$
für $x \in \left]0;\pi\right[$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

2001 AII

3. Bestimmen Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$y - x^2 \cdot e^{2x} + x \cdot y' = 0$$
mittels der Methode der Variation der Konstanten.

2002 AII

2 Für einen Laborversuch wird eine Kupfersulfatlösung gebraucht, deren Konzentration $y(t)$ mit der Zeit t abnimmt. Dazu wird in einem Behälter eine Kupfersulfatlösung mit einer bestimmten Konzentration und dem Volumen V bereitgestellt.
Während des Versuchs fließt eine weitere Kupfersulfatlösung mit konstanter Durchflussmenge Q und konstanter Konzentration k_0 in den Behälter. Gleichzeitig fließt dieselbe Durchflussmenge Q bereits vermischter Kupfersulfatlösung aus dem Behälter ab. In dieser Versuchsphase gelte für die Konzentration $y(t)$ der Kupfersulfatlösung im Behälter die folgende Differenzialgleichung
$$\dot{y}(t) = \tfrac{Q}{V} \cdot k_0 - \tfrac{Q}{V} \cdot y(t) \quad \text{mit Q, } k_0 \text{ und V konstant, } t \geq 0.$$
Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante C, wenn sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Behälter eine Kupfersulfatlösung mit der Konzentration $30\,\tfrac{g}{\ell}$ befindet und $k_0 = 24\,\tfrac{g}{\ell}$ ist.
$$\left(\text{Teilergebnis}: y(t) = C \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} + k_0\right)$$

2003 AII

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$$y' + 2y \cdot \tan(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$
für $x \in \left]0; \tfrac{\pi}{2}\right[$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

2004 AII

4 Schließt man eine reale Spule zum Zeitpunkt $t = 0$ an eine Gleichspannung mit $U = U_0$ an, dann gilt für die Stromstärke $I(t)$ die Differenzialgleichung
$$U_0 - L \cdot \dot{I}(t) - R \cdot I(t) = 0,$$
wobei U_0, R und L konstante Größen sind und $\dot{I}(t)$ die 1. Ableitung der Stromstärke ist.
Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung der Differenzialgleichung für die Stromstärke $I(t)$ für die Anfangsbedingung $I(0) = 0$.

2005 AII

4. Bestimmen Sie für die Differenzialgleichung
$$y' - y \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{-2}{x^2+1}$$
mit $x > 0$ die allgemeine Lösung mit der Methode der Variation der Konstanten.

2007 AI

4. Bestimmen Sie für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' \cdot \cos(x) + y \cdot \sin(x) - 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) = 0$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

2007 AII

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' + 2y = \cos(x) \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

37.5 *Integration einer Differentialgleichung durch Substitution (nicht im Lehrplan!)*

In einigen Fällen ist es möglich, eine Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x;y)$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf eine separable DGL 1. Ordnung zurückzuführen, die dann durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

DGLen vom Typ $y' = f(ax+by+c)$ lassen sich durch die Substitution

$$u = ax + by + c$$

lösen. Dabei sind y und u als Funktionen von x zu betrachten.
Bildet man nun die Ableitung nach x, so erhält man:

$$u' = a + by'$$

Setzt man noch die ursprüngliche DGL $y' = f(u)$ ein, so folgt:

$$u' = a + b \cdot f(u)$$

Die rechte Seite dieser DGL hängt nur von u ab und lässt sich nun durch Trennung der Variablen lösen.
Die Lösung $u = u(x)$ setzt man dann in die Substitutionsgleichung ein und löst diese dann nach y auf.
Bsp.: $y' = 2x - y$
Diese DGL ist von der Form $y' = f(ax+by+c)$.

Substitution: $u = 2x - y$

Ableitung: $u' = 2 - y'$

DGL einsetzen: $u' = 2 - u$

T. d. V.:

$$\frac{du}{dx} = 2 - u$$

$$\frac{du}{2-u} = dx$$

Integration:

$$\int \frac{du}{2-u} = \int dx$$

$$-\ln|2-u| = x + c$$

$$\ln|2-u| = -x - c$$

$$2 - u = e^{-x-c}$$

$$u = 2 - e^{-x} \cdot \underbrace{e^{-c}}_{=k}$$

$$u = 2 - k \cdot e^{-x}$$

Rücksubstitution: $u = 2 - k \cdot e^{-x} = 2x - y$

Auflösen nach y: $y(x) = k \cdot e^{-x} + 2x - 2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Weitere Beispiele:

1. $y' = 2x - y + 1$ $\qquad y(x) = 2x + k \cdot e^{-x} - 1$
2. $y' = (x+y)^2$ $\qquad y(x) = \tan(x+c) - x$
3. $y' = e^{x+y} - 1$ $\qquad y(x) = -\ln(-x-c) - x$

DGLen vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ lassen sich durch die Substitution

$$u = \frac{y}{x}$$

lösen.
Dazu formt man die Substitution etwas um:

$$y = u \cdot x$$

und leitet nun ab.

$$y' = u' \cdot x + u$$

Die DGL eingesetzt liefert dann

$$f(u) = u' \cdot x + u$$

Diese DGL kann durch Trennung der Variablen gelöst werden. Man erhält:

$$f(u) - u = x \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}$$

Nach der unbestimmten Integration wird rücksubstituiert und die Gleichung nach y aufgelöst.

Bsp.: $y' = \frac{x + 2y}{x}$

Nach einer kleinen Umformung folgt:

$$y' = 1 + 2 \cdot \frac{y}{x}$$

Diese DGL ist nun von der Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Substitution: $u = \frac{y}{x}$

Auflösen nach y: $y = u \cdot x$

Ableitung bilden: $y' = u' \cdot x + u$

DGL einsetzen: $1 + 2 \cdot u = u' \cdot x + u$

Umformen: $1 + u = \frac{du}{dx} \cdot x$

T.d.V.: $\frac{dx}{x} = \frac{du}{1+u}$

Integration:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1+u}$$

$$\ln|x| = \ln|1+u| + c$$

$$\ln|1+u| = \ln|x| - c$$

$$1 + u = e^{\ln|x| - c}$$

$$u = \underbrace{e^{-c}}_{=k} \cdot e^{\ln|x|} - 1$$

$$u = kx - 1$$

Rücksubstitution: $\frac{y}{x} = kx - 1$

$y(x) = kx^2 - x \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$

Weitere Beispiele:

1. $y' = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\qquad y(x) = x \cdot \arcsin(k \cdot x)$
2. $x \cdot y' = y \cdot \left(\ln(x) - \ln(y) + 1\right)$
3. $x^2 \cdot y' = y \cdot (x - y)$
4. $x \cdot y' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$