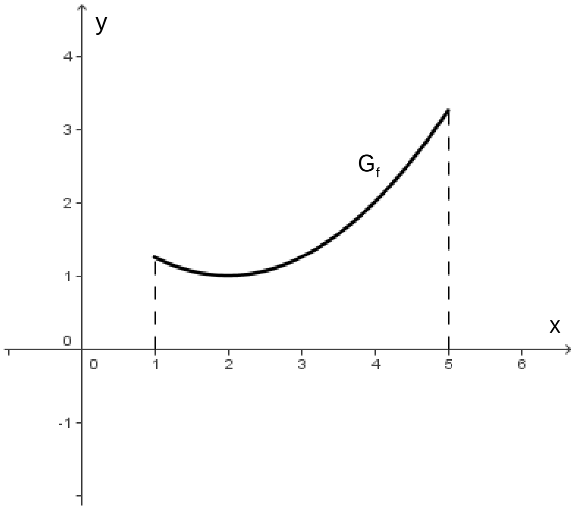
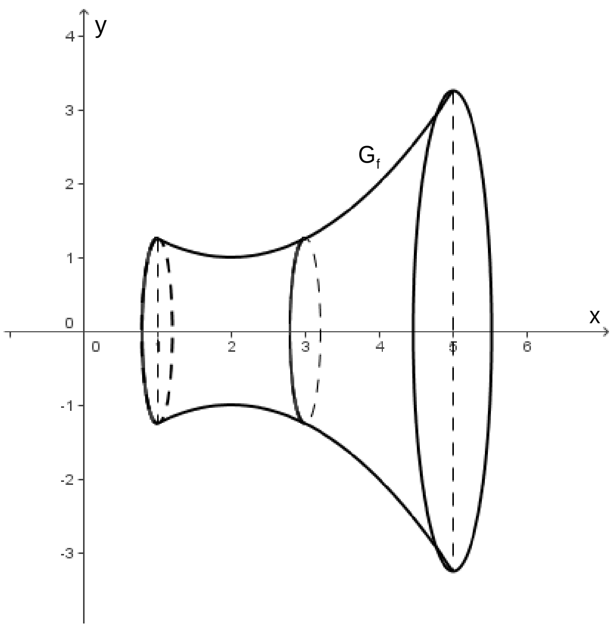
§ 36 Anwendung der Integralrechnung

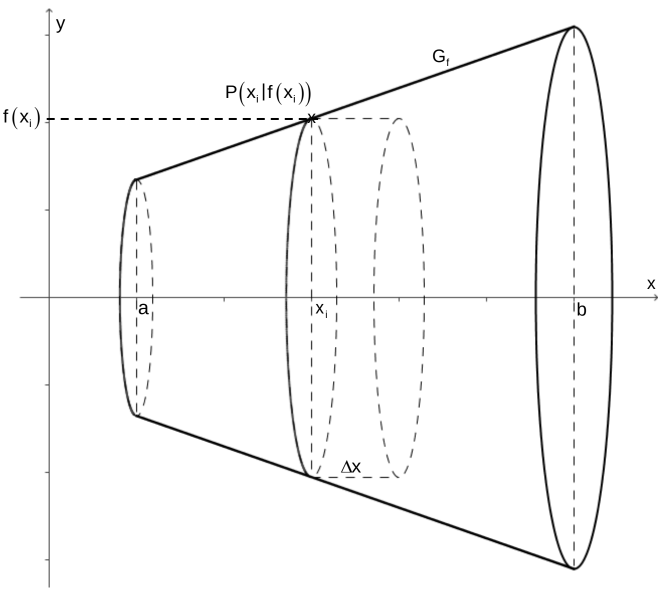
36.1 Volumenberechnung von Rotationskörper

Die Berechnung der Flächeninhalte ebener Figuren ist uns ja schon seit der Mittelstufe bekannt. Mit Hilfe der Integralrechnung lassen sich aber auch die Flächeninhalte krummliniger Flächen berechnen.
Eine Volumenberechnung beschränkte sich bisher auf die bekannten geometrischen Grundkörper (Kugel, Zylinder, Kegel, Pyramide, Quader und Würfel).
Die Integralrechnung ermöglicht es uns aber nun auch das Volumen von rotationssymmetrischen Körpern zu berechnen.
Man betrachte also eine in einem Intervall $[a; b]$ stetige und integrierbare Funktion f. Das durch diese Funktion beschriebene Kurvenstück kann nun um die x-Achse oder um die y-Achse rotieren. Dabei entsteht ein Rotationskörper.
Sei also die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$ mit $\mathbb{D}_f = [1; 5]$ gegeben.



Durch Rotation um die x-Achse entsteht nun ein Rotationskörper, dessen Volumen sich mittels der Integralrechnung ermitteln lässt.





Durch Schnitte senkrecht zur Drehachse (x-Achse) zerlegt man zunächst den Rotationskörper in eine große Anzahl n von Kreiszylindern gleicher Dicke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Das Volumen V des Rotationskörpers setzt sich in guter Näherung aus der Summe der Volumen V_i der einzelnen Kreiszylinder zusammen. Je mehr Kreiszylinder man hat, desto besser wird die Näherung. Dies erhält man letztendlich für $n \to \infty$.
Eigentlich müssten wir hier auch wieder die Ober- und die Untersumme der Teilvolumen bilden, aber auf das wollen wir der Einfachheit halber verzichten.
Also gilt:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \qquad \text{mit } n \to \infty$$

Oder einfacher:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Für das Volumen des i-ten Kreiszylinders gilt:

$$V_i = r^2 \cdot \pi \cdot h = \left(f\left(x_i\right)\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x$$

Oben eingesetzt:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(x_i\right)\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(x_i\right)\right)^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 \cdot dx$$

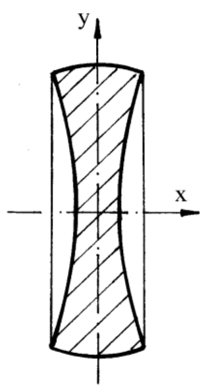
<u>Rotationsvolumen bei Drehung einer Kurve um die x-Achse</u>:
Rotiert der Graph der Funktion $f: x \mapsto f\left(x\right)$ mit $\mathbb{D}_f = \left[a; b\right]$ um die x-Achse, so hat der entstehende Rotationskörper das Volumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx$$

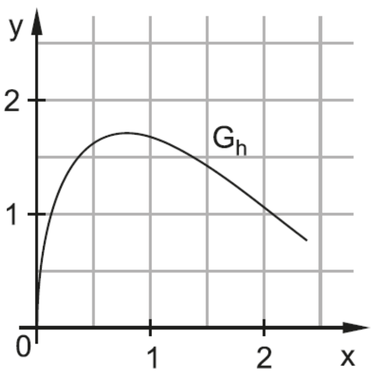
Aufgaben:

1. Bekannte Rotationskörper
   Das zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse über $\left[a; b\right]$ liegende Flächestück rotiere um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörper und vergleichen Sie das Ergebnis mit evtl. bekannten Volumenformeln der Raumgeometrie.
   a) $f\left(x\right) = r;\quad a = 0;\ b = h$
   b) $f\left(x\right) = x;\quad a = 0;\ b = h$
   c) $f\left(x\right) = m \cdot x;\quad a = 0;\ b = h$

2. Weitere Rotationskörper
   a) Durch Drehung des Parabelbogens mit der Gleichung $f(x)=\sqrt{x}$ um die x-Achse entsteht ein Rotationsparaboloid.
   Berechnen Sie $V=\pi\cdot\int_0^4 \left(f(x)\right)^2 dx$ und fertigen Sie eine Skizze des Körpers an.
   b) Durch Rotation der Halbellipse mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$ um die x-Achse entsteht ein Rotationsellipsoid. Berechnen Sie sein Volumen.
   c) Die Kurve mit der Gleichung $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ rotiert zwischen $x=1$ und $x=4$ um die x-Achse. Es entsteht eine kelchförmige Schale. Berechnen Sie deren Inhalt.
   d) Der Graph der Funktion $f(x)=\frac{1}{5}x\sqrt{x-4}$ rotiert zwischen $x=4$ und $x=8$ um die x-Achse. Es entsteht ein glockenförmiger Hohlkörper. Berechnen Sie sein Fassungsvermögen und fertigen Sie eine Skizze des Körpers an.
3. Gegeben ist die Funktion $f(x)=4-\frac{1}{9}x^2$. Dreht man das sich zwischen den beiden Nullstellen befindende Kurvenstück um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.
4. (AP 2005 AII)
   Ein Metallstück ist auf der Drehbank so bearbeitet worden, dass danach sein Profil durch die Terme $p(x)=x\cdot e^{2-x}$ und $q(x)=-x\cdot e^{2-x}$, $x\in\mathbb{R}$ beschrieben wird. Die Rotationsachse ist die x-Achse. Das Metallstück wird anschließend bei $x=1$ und bei $x=3$ senkrecht zur Rotationsachse abgeschnitten. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieses Rotationskörpers auf zwei Nachkommastellen genau.
5. (AP 2001 AII)
   Gegeben ist eine 12 cm dicke Schwungscheibe. Nach oben bzw. nach unten ist ihr Querschnitt durch die Kurve: $x^2+y^2=261$ abgeschlossen. Die seitlichen Vertiefungen sollen durch Ausdrehen erzeugt werden, so dass die Scheibe in der Mitte noch 6 cm dick ist. Die Vertiefungen haben die Form von Parabeln, sie werden für $x>0$ dargestellt durch die Kurve: $y^2=75x-225$.
   Bestimmen Sie die Volumenmaßzahl der Scheibe



6. **(AP 2016 A I)**
   Durch die Rotation des Graphen der Funktion
   $h:\ x\mapsto 3\cdot\sqrt{e^{-x}\cdot\sin(x)},\ D_h=\left[0;\ \frac{3}{4}\pi\right]$,
   um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper, welcher die Form einer Blumenvase beschreibt.
   Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers.



7. **(AP 2017 A II)**

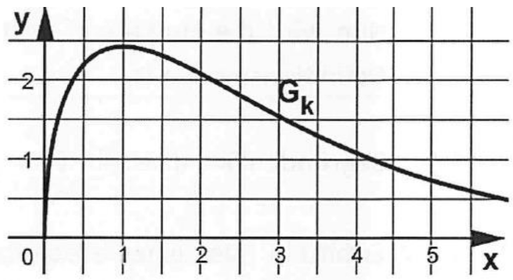
2 Gegeben ist weiter die Funktion h: $x \mapsto \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}_0^+$.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle von h und das Verhalten von h(x) für $x \to +\infty$.

2.2 Der Graph von h, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche A ein. Bei der Rotation der Fläche A um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers.

(AP 2018 AI)

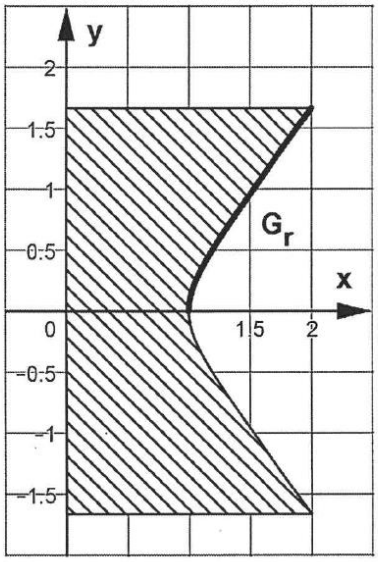
3 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 4\sqrt{x} \cdot e^{-0{,}5x}$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}_0^+$. Ein Ausschnitt ihres Graphen G_k ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Bei der Rotation des Graphen von k um die x-Achse entsteht ein unendlich ausgedehnter Drehkörper. Berechnen Sie die Maßzahl seines Volumens.



(AP A II Teil 2 2020)

2 Es soll eine Vogeltränke aus einem Holzzylinder hergestellt werden. Die Vogeltränke wird beschrieben durch die Rotation der rechts abgebildeten schraffierten Figur um die x-Achse. In der Abbildung bezeichnet G_r den Graphen der Funktion $r: x \mapsto \sqrt{x^2 \ln(x)}$ für $1 \leq x \leq 2$.

Bestimmen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts der Vogeltränke auf zwei Nachkommastellen gerundet.



2012 AI 3.2
2012 AII 3.2
2013 AII 2
2014 AI 2.3

Es gibt auch Aufgaben, bei denen der Graph der Funktion $f(x)$ um die y-Achse rotiert.
Doch stattdessen lassen wir einfach den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ um die x-Achse rotieren und erhalten für das Volumen des Rotationskörpers:

$$V = \pi \cdot \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx$$

Doch da sich nicht immer so ohne weiteres von jeder Funktion $f(x)$ auch eine Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ bilden lässt muss man obige Formel noch etwas nachbessern.
Da $y = f^{-1}(x)$ folgt: $x = f(y)$
Vertauscht man nun x mit y (das hat man ja beim Bilden der Umkehrfunktion getan und das wollen wir nun wieder rückgängig machen), dann erhält man obiges Integral:

$$V = \pi \cdot \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy$$

und es gilt wieder: $y = f(x)$

Davon die Ableitung gebildet: $\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \Rightarrow \quad dy = f'(x) \cdot dx$

Das nun alles in die Volumenformel eingesetzt liefert:

$$V = \pi \cdot \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy = \pi \cdot \int_a^b \left(f^{-1}(f(x))\right)^2 f'(x) \cdot dx = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot f'(x) \cdot dx$$

mit unseren ursprünglichen Integrationsgrenzen a und b, da man ja jetzt wieder über dx integriert. Und das ist dann schon ein erstaunliches Ergebnis.

<u>Rotationsvolumen bei Drehung einer Kurve um die y-Achse</u>:
Rotiert der Graph der Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit $\mathbb{D}_f = [a; b]$ um die y-Achse, so hat der entstehende Rotationskörper das Volumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot f'(x) \cdot dx$$

Das praktische dabei ist nun, dass man nicht die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ der Funktion $f(x)$ bilden muss, sondern lediglich deren Ableitung $f'(x)$.
Und nach einmaliger partieller Integration erhält man:

$$V = \pi \cdot \left(\left[x^2 \cdot f(x)\right]_a^b - 2\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx \right)$$

Aufgaben:

7.

8.

9. (AP 2005 AI)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto f_a(x) = ax + \sin(x)$ mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ sowie $a \in \mathbb{R}^+$.

a) Begründen Sie, dass für die Funktionswerte der ersten Ableitung gilt: $f_a'(x) \in [-1+a\,;1+a]$. Ermitteln Sie diejenigen Werte von a, für die der Graph von f_a über Extrempunkte verfügt.

b) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_1 unendlich viele Terrassenpunkte besitzt. Berechnen Sie dann deren Koordinaten. Zeichnen Sie den Graphen von f_1 für $-\pi \le x \le 2\pi$.

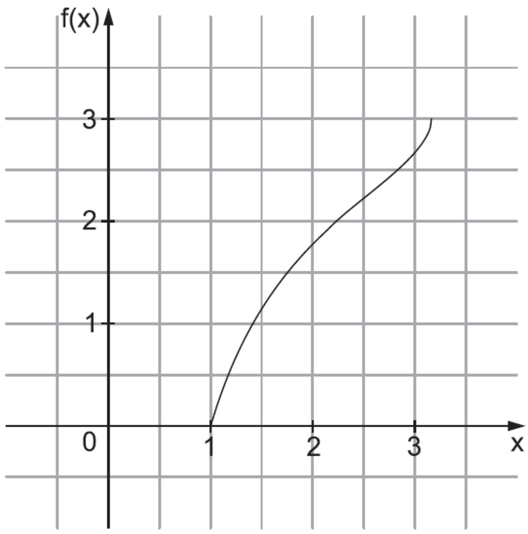
c) Berechnen Sie das Integral $\pi \cdot \int_0^\pi [f_1(x)]^2\,dx$ und veranschaulichen Sie den Ergebniswert mit Ihrer Darstellung aus b.

(AP 2017 A I)

Für die maschinelle Herstellung von Pralinen wird eine Gussform gebaut. Die Gussform entsteht als rotationssymmetrischer Körper, der durch Rotation des Graphen der Funktion

$f\colon x \mapsto \dfrac{3x - \sqrt{10 - x^2}}{x}, \quad x \in [1; \sqrt{10}]$

um die y-Achse entsteht, wobei x in cm gemessen wird. Auf eine Mitführung der Einheiten wird verzichtet. Berechnen Sie das Volumen V(b) einer Praline, wenn die Gussform von den Geraden mit den Gleichungen $y = 0$ und $y = b$ begrenzt wird, sowie V(3) auf zwei Nachkommastellen genau.

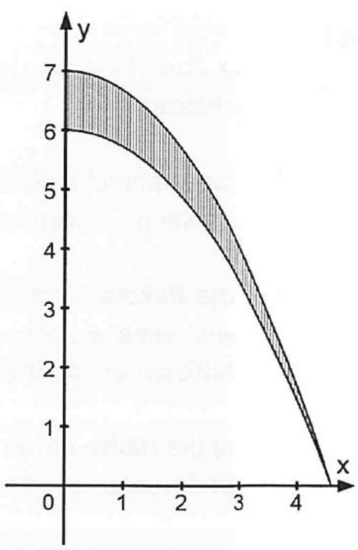


(AP 2018 AII)

2 Für eine Lampe wird eine parabelförmig begrenzte Abdeckung aus Acrylglas benötigt (Dichte von Acrylglas: $\rho = 1{,}18\frac{g}{cm^3}$).

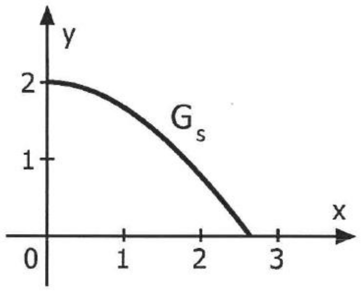
Das Musterstück entsteht als Rotationskörper des in der nebenstehenden Abbildung dargestellten Flächenstücks, das von den Graphen der beiden Funktionen p_1 und p_2 mit $p_1(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7$ und $p_2(x) = -\frac{2}{7}x^2 + 6$ für $0 \le x \le \sqrt{21}$ im I. Quadranten begrenzt wird, bei der Rotation um die y-Achse. Eine Längeneinheit beträgt 1 cm.

Ermitteln Sie die Masse der Abdeckung.



(AP AI mH 2020)

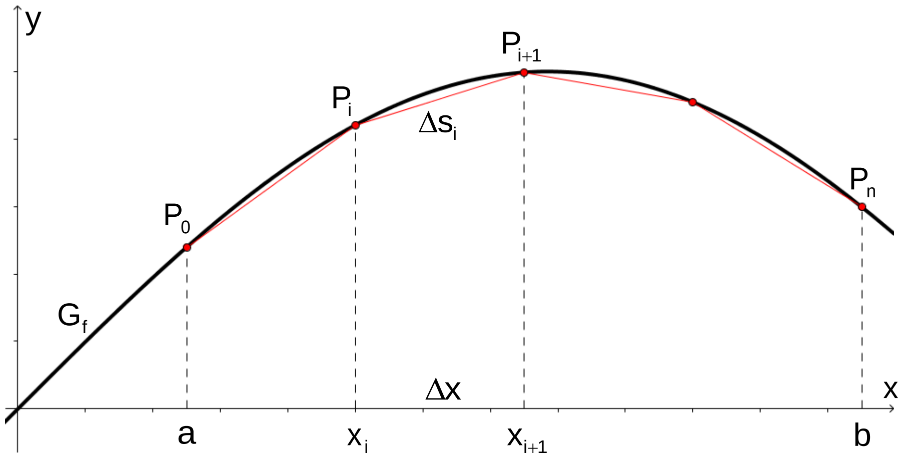
1 Gegeben ist die Funktion $s : x \mapsto 8 - 2\sqrt{x^2 + 9}$ mit der Definitionsmenge $D_s = [0; \sqrt{7}]$. Ihr Graph G_s (siehe Abbildung rechts) rotiert um die y-Achse und beschreibt damit eine rotationssymmetrische Lehmhütte. Die Lehmhütte ist in der Mitte 2,0 m hoch und hat am Boden einen Durchmesser von ca. 5,29 m. Berechnen Sie das Volumen der Lehmhütte auf $0{,}01\,\text{m}^3$ genau.



2010 AI 1.7

Bogenlänge einer ebenen Figur

Die Länge geradliniger Strecken können wir Dank der Geometrie der Mittelstufe und der analytischen Geometrie in der 12. Klasse berechnen. Die einzige krummlinige Kurve, deren Länge wir bestimmen können ist der Kreisbogen. Wir wollen nun aber auch die Länge einer Kurve berechnen, deren Verlauf durch die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ im Intervall $[a\,;b]$ beschrieben wird.



Um nun die Länge der Kurve im Intervall $[a\,;b]$ zu bestimmen zerlegt man zunächst dieses Intervall in n Teile mit der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Die Länge des Bogens setzt sich in guter Näherung aus der Summe der Sehnen Δs_i zusammen. Je mehr Sehnen man hat, desto besser wird die Näherung. Die entsprechende Bogenlänge erhält man letztendlich für $n \to \infty$.
Also gilt:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$

Betrachtet man nun die Sehne Δs_i, so folgt nach den Satz des Pythagoras:

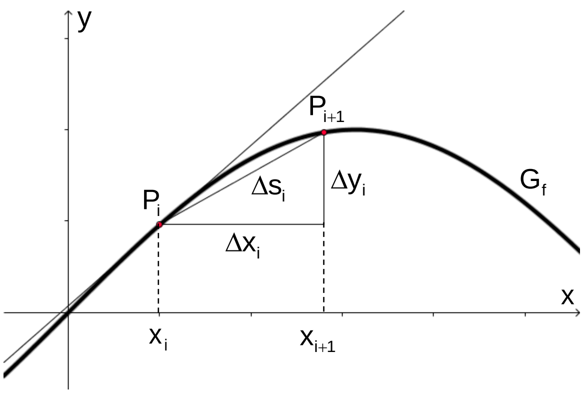
$$(\Delta s_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2$$

Zieht man die Wurzel und berücksichtigt, dass $\Delta x_i = \Delta x$, so folgt:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

und nach einer kleinen Umformung

$$\Delta s_i = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}$$



Oben eingesetzt:

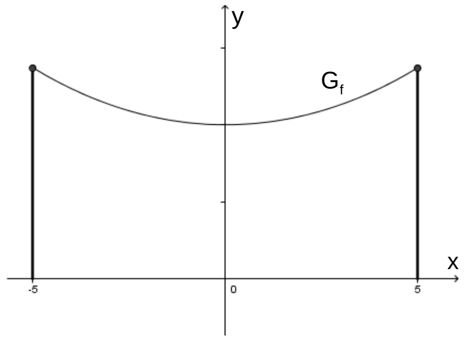
$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Bogenlänge einer ebenen Kurve:
Eine Kurve, welche durch die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ im Intervall $x \in [a;b]$ beschrieben wird besitzt die Länge

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Aufgaben:

10. Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurvenstücke im Intervall $[a;b]$.
    a) $f(x) = x^2$ $\quad a = 0;\, b = 3$
    b) $f(x) = \ln(x)$ $\quad a = 1;\, b = e$
    c) $f(x) = \sin(x)$ $\quad a = 0;\, b = \pi$
    d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \ln\left(\sqrt{x}\right)$ $\quad a = 4;\, b = 16$
    e) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ $\quad a = 1;\, b = 2$
11. Ein Seil wird zwischen den Enden zweier Masten befestigt. Die Masten haben einen Abstand von $10\,\text{m}$.
    Das durchhängende Seil beschreibt eine Kurve, deren Verlauf durch die Funktion $f(x) = 4\cdot\left(e^{\frac{1}{8}x} + e^{-\frac{1}{8}x}\right)$ dargestellt werden kann (Kettenlinie).



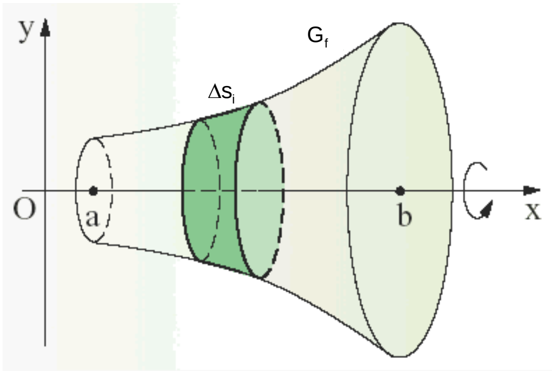
    a) Berechnen Sie die Masthöhe und den tiefsten Punkt des Seils.
    b) Ermitteln Sie die Länge des Seils.

    Der Verlauf des Seils kann vereinfacht auch durch eine quadratische Funktion der Form $p(x) = ax^2 + b$ beschrieben werden.

    c) Ermitteln Sie zunächst die Werte für a und b, wenn man davon ausgeht, dass beide Kurven durch die oberen Enden der Masten verlaufen und der tiefste Punkt gleich sein soll.
    d) Berechnen Sie die Länge der Kurve, die nun durch die Funktion p beschrieben wird und vergleichen Sie diesen Wert mit dem in b) berechneten Wert. Um wie viel Prozent weicht er ab?
    e) Das Seil, welches durch die Funktion f beschrieben wird rotiert nun um die Verbindungsgerade der beiden oberen Mastenden. Berechnen Sie das dabei umschlossene Volumen.

Mantelfläche von Rotationskörper

Wir wollen nun die Mantelfläche eines Rotationskörper berechnen.
Betrachten wir dazu wieder die Funktion $f: x \mapsto f(x)$, deren Graph im Intervall $[a\,;b]$ bei Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper erzeugt. Der Graph der Funktion f verlaufe der Einfachheit halber oberhalb der x-Achse, also $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a\,;b]$.



Die Kurve im Intervall $[a\,;b]$ zerlegen wir nun in einzelne Kurvenstücke der Länge Δs_i $i \in \{1;...;n\}$. Diese Kurvenstück überstreicht dabei einen kleinen Teil des Mantels. Es entsteht so ein schmales, reifenförmiges Band. Schneidet man dieses Band auf, so entsteht näherungweise ein Rechteck mit den Seitenlängen Δs_i und $2 \cdot \pi \cdot r_i = 2 \cdot \pi \cdot f(x_i)$.

Für die Mantelfläche gilt dann mit $\Delta s_i = \Delta x \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}$:

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \pi \cdot f(x_i) \cdot \Delta s_i = 2 \cdot \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

<u>Mantelfläche eines Rotationskörpers</u>:
Rotiert der Graph der Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit $\mathbb{D}_f = [a; b]$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a\,;b]$ um die x-Achse, so hat der entstehende Rotationskörper die Mantelfläche:

$$M = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Aufgaben:

12. Die Kettenlinie mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ erzeugt bei Rotation um die x-Achse einen Körper, der Katenoid heißt. Berechnen Sie dessen Mantel über dem Intervall $[-1;1]$.