§ 32 Die ln-Funktion und ihre Ableitung

Die Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist streng monoton zunehmend. Ihre Umkehrfunktion ist die Logarithmusfunktion zur Basis e.

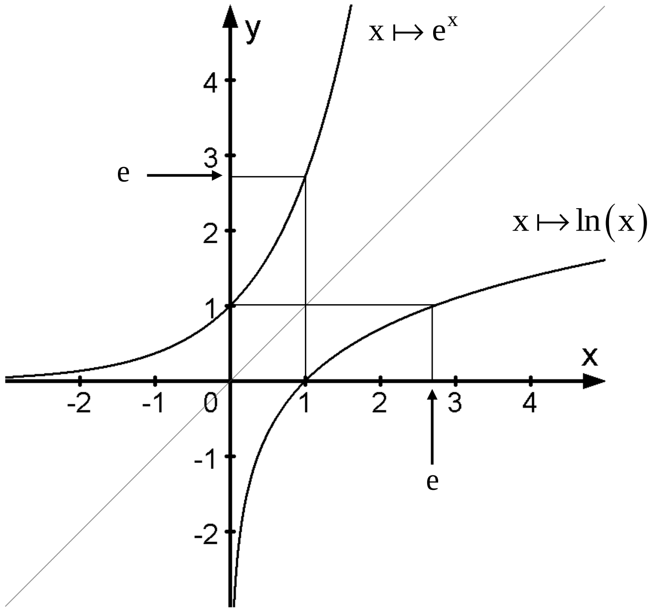
32.1 Die ln-Funktion

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $x \mapsto e^x;\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$, ist die natürliche Logarithmusfunktion

$$x \mapsto \ln(x);\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

Sie wird auch kurz als ln-Funktion bezeichnet.

Den Graphen der ln-Funktion erhält man aus dem Graphen der e-Funktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.



32.2 Definitionsmenge der ln-Funktion

Bei der Bestimmung der Definitionsmenge der ln-Funktion ist zu beachten, dass das Argument des Logarithmus immer größer als Null ist (Ähnlich wie unter der Wurzel!).

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f

a) $f(x) = \ln(x+2)$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)$

d) $f(x) = \ln\left(-\frac{1}{4}x^2 + 4\right)$

e) $f(x) = \ln(x+2) + \ln(5-x)$

f) $f(x) = \ln(x) - \ln(x^2 - 4)$

g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+3}{x^2+2}\right)$

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2-4}\right)$

i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{-\frac{1}{2}x^2+2}\right)$

j) $f(x) = \dfrac{2-x}{\ln(1+x)}$

k) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{1-\ln(x)}$

l) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)(1-\ln(x))}$

2. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die maximale Definitionsmenge der Funktion f.

a) $f(x) = \ln(ax - x^2)$ b) $f(x) = \ln(x^2 - a)$

32.3 Einige wichtige Beziehungen

Zum Arbeiten mit der ln-Funktion sind folgende Beziehungen sehr hilfreich.

$$\ln(1) = 0$$
$$\ln(e) = 1$$
$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln(x)} = x \qquad x \in \mathbb{R}^+$$
$$\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v) \qquad u, v \in \mathbb{R}^+$$
$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v) \qquad u, v \in \mathbb{R}^+$$
$$\ln(u^r) = r \cdot \ln(u) \qquad u \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$$

Aufgaben:

3. Berechnen Sie ohne Taschenrechner

$\ln(e) =$

$\ln(e^2) =$

$\ln(e^{-2}) =$

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) =$

$\ln\left(\sqrt{e}\right) =$

$\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) =$

4. Vereinfachen Sie.

$e^{\ln(3)} =$

$e^{-\ln(5)} =$

$e^{0,5 \cdot \ln(25)} =$

$e^{\ln(e)} =$

$e^{\ln(2)-1} =$

5. Vereinfachen Sie

$\ln(3) + 3 \cdot \ln(2) =$

$\frac{1}{2} \cdot \ln(9) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) =$

$\ln(3x) - \ln(x) =$

$\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \ln\left(\sqrt{x}\right) =$

$2 \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(x^2\right) =$

6. Drücken Sie durch einen einzigen Logarithmusterm aus.

a) $\ln(x) + \ln(x+1)$

b) $\ln(x) - \ln(x+1)$

c) $3 \cdot \ln(x) + 2 \cdot \ln(x+1)$

d) $2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right)$

e) $-3 \cdot \ln(x) - 2 \cdot \ln(x+1)$

f) $\ln \frac{x}{x+2} + \ln \frac{x+2}{x+3} + \ln \frac{x+3}{x+1}$

32.4 Lösen von Gleichungen

Das Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen haben wir ja schon gelernt. Nun aber noch einige spezielle Übungen zum warm werden für später!

7. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen

a) $\ln(x) = 3$

b) $\ln(x) = -\frac{1}{5}$

c) $2 \cdot \ln(x) = -2$

d) $\ln\left(x^2\right) = 2$

e) $e^x = 3$

f) $x \cdot e^x = 0$

g) $x^2 \cdot e^x = 0$

h) $\ln(x) \cdot e^x = 0$

i) $x \cdot \ln(x) = 0$

8. Lösen Sie die Exponentialgleichungen

a) $e^x = e^{1-2x}$

b) $e^{x-1} = \frac{1}{2}$

c) $2 \cdot e^{-x} = e^{x+1}$

d) $x \cdot e^x = 3x$

e) $\left(1-e^x\right)^2 = 1 + e^x$

f) $e^{2x} + 2e^x = 8$

g) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$

h) $e^{\left(-x^2\right)} = e^{5x}$

9. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie die Logarithmusgleichungen.

a) $\ln(3x-1) = \ln(2x)$

b) $\ln(2x) = -1$

c) $\ln\left(x^2-2\right) = 0$

d) $\ln\left(2e - x^2\right) = 1$

e) $x^2 \cdot \ln(x) = 4 \cdot \ln(x)$

f) $\ln\left(x^2\right) - \ln(2x-1) = 1$

g) $\left(\ln(x)\right)^2 = \ln(x) + 2$

h) $\ln\left(x^2\right) = -1$

i) $\ln(x+5) - \ln(x-1) = \ln(2x+4) - \ln(x)$

32.5 Die Ableitung der ln-Funktion

Es gilt folgende Beziehung:

$$e^{\ln(x)} = x$$

Bildet man nun auf beiden Seiten der Gleichung die Ableitung, so folgt (Kettenregel!):

$$\left(e^{\ln(x)}\right)' = (x)'$$

$$\left(\ln(x)\right)' \cdot e^{\ln(x)} = 1$$

$$\left(\ln(x)\right)' \cdot x = 1$$

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

Die ln-Funktion ist an jeder Stelle differenzierbar und es gilt:

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Bemerkung:

- $f(x) = \log_b(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{\ln(b)\cdot x}$
- $f(x) = \ln(g(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

10. Bestimmen Sie $\mathbb{D}_{max}$ und bilden Sie die erste Ableitung.

a) $f(x) = \ln(2x)$

b) $f(x) = \ln(x^2)$

c) $f(x) = (\ln(x))^2$

d) $f(x) = \ln(2 - x^2)$

e) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

f) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = \ln(1 + x)$

h) $f(x) = \ln(a - x);\ a > 0$

i) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

k) $f(x) = x^n \cdot \ln(x)$

l) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

m) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

n) $f(x) = \ln(9 - x^2)$

o) $f(x) = x \cdot \ln(x) - x$

p) $f(x) = \ln(\ln(x))$

q) $f(x) = x \cdot (\ln(x))^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x$

Aufgaben

1.0 Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto x \cdot \ln(x)$ mit $\mathbb{D}_f =]0;\infty[$.

1.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f an den Rändern der Definitionsmenge.

1.3 Ermitteln Sie Art und Lage des relativen Extremum des Graphen der Funktion f.

1.4 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f keinen Wendepunkt besitzt.

1.5 Zeichnen Sie für $0 \le x \le 3$ den Graphen der Funktion in ein kartesisches Koordinatensystem ein. $\left(1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{cm}\right)$

1.6 Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$ eine Stammfunktion von f ist.

1.7 Berechnen Sie $\int_1^{e^{-1}} f(x)\,dx$ und kennzeichnen Sie die entsprechende Fläche in ihrem Diagramm von 1.5.

2.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2 \cdot \ln(x)$ mit $\mathbb{D}_f =]0;\infty[$.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

2.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f an den Rändern der Definitionsmenge.

2.3 Ermitteln Sie Art und Lage des relativen Extremum des Graphen der Funktion f.

2.4 Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis graphisch.

2.5 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f.

2.6 Zeichnen Sie für $0 \le x \le 2$ den Graphen der Funktion in ein kartesisches Koordinatensystem ein. $\left(1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{cm}\right)$

2.7 Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{9}x^3$ eine Stammfunktion von f ist.

2.8 Berechnen Sie $\int_1^{e^{-1}} f(x)\,dx$ und kennzeichnen Sie die entsprechende Fläche in ihrem Diagramm von 2.6

3.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (\ln(x))^2$ mit $\mathbb{D}_f =]0;\infty[$.

3.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

3.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f an den Rändern der Definitionsmenge.

3.3 Ermitteln Sie Art und Lage des relativen Extremum des Graphen der Funktion f.

3.4 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion f.

3.5 Zeichnen Sie für $0 \le x \le 5$ den Graphen der Funktion in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

4.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln\left(9 - x^2\right)$ mit $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}$.

4.1 Ermitteln Sie die Definitionsmenge und untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie.

4.2 Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten des Graphen der Funktion f an den Rändern seiner Definitionsmenge.

4.3 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

4.4 Ermitteln Sie die Koordinaten des relativen Extremum des Graphen der Funktion f.

4.5 Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion f. Was lässt sich daraus folgern?

4.6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und seine Asymptoten in ein Koordinatensystem ein.

5.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln\left(x^2 + x\right)$ mit $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}$.

5.1 Ermitteln Sie die Definitionsmenge .

5.2 Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten des Graphen der Funktion f an den Rändern seiner Definitionsmenge.
5.3 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.
5.4 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f keine Extremum besitzt.
5.5 Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion f. Was lässt sich daraus folgern?
5.6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und seine Asymptoten in ein Koordinatensystem ein.

2004 A II
2010 A I
2012 A I
2008 A I