§ 30 Die Wurzelfunktion

30.1 Die „klassische“ Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion $f: x \mapsto \sqrt{x}$ kennen wir noch aus vergangenen Tagen.

i) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}_0^+$

ii) Nullstelle: $f(x) = \sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

iii) Extrema:
Um die erste Ableitung der Funktion f zu bilden muss zunächst der Funktionsterm etwas umgeformt werden; dann leitet man den Funktionsterm ähnlich wie bei den ganzrationalen Funktionen ab:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$$

Somit hat der Graph der Funktion f keine Extrema.

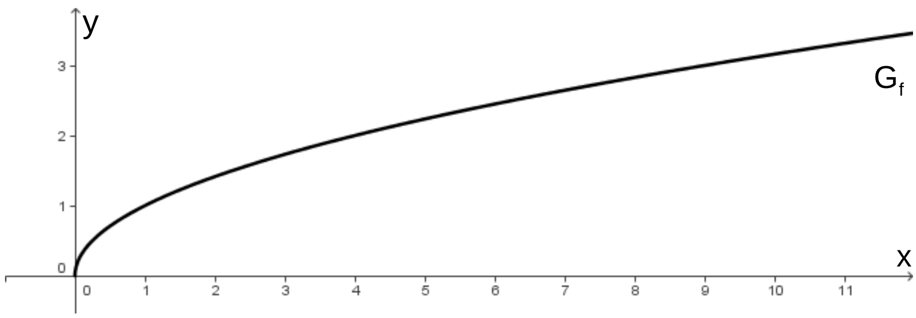
Da gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ für alle $x \in D_f$ verläuft der Graph der Wurzelfunktion in seiner gesamten Definitionsmenge streng monoton steigend.

iv) Wendepunkt:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\tfrac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(x^3\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} < 0$$

Somit hat der Graph der Funktion f keine Wendepunkte und ist in seiner gesamten Definitionsmenge „rechtsgekrümmt!.

v) Graph:



Aufgaben:

1. Geben Sie zu folgenden Funktion die Definitionsmenge an, ermitteln Sie die Nullstelle, untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge und ermitteln Sie gegebenenfalls die Art und Lage des rel. Extremum.
   a) $f: x \mapsto x \cdot \sqrt{x}$
   b) $f: x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   c) $f: x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$
   d) $f: x \mapsto x - \sqrt{x}$

30.2 Die allgemeine Wurzelfunktion

Doch wie läuft die Kurvendiskussion bei der etwas allgemeineren Funktion

$$f: x \mapsto \sqrt{g(x)}$$

i) Definitionsmenge: $D_f = \{x | g(x) \geq 0\}$

Die Lösungen der Ungleichung $g(x) \geq 0$ bilden die Definitionsmenge der Funktion f.

ii) Nullstelle: $f(x) = \sqrt{g(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0$

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung $g(x) = 0$.

iii) Extrema:

Um die erste Ableitung der Funktion f zu bilden leiten wir die Funktion f mit Hilfe des Differentialquotienten ab.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{g(x+h)} - \sqrt{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{g(x+h)} - \sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{g(x+h)} + \sqrt{g(x)}\right)}{h \cdot \left(\sqrt{g(x+h)} + \sqrt{g(x)}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h \cdot \left(\sqrt{g(x+h)} + \sqrt{g(x)}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g(x+h)} + \sqrt{g(x)}} \right) \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{g(x+h)} + \sqrt{g(x)}} \right) \\
&= g'(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \\
&= \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) = 0$$

Die Lösungen der Gleichung $g'(x)=0$ sind dann die Stellen, an denen der Graph der Funktion f eine waagrechte Tangente hat.

iv) Wendepunkt: Da kommt dann die Quotientenregel wieder ins Spiel!

v) Graph: Ergibt sich dann aus obigen Ergebnissen!

Aufgaben:

2. Geben Sie zu folgenden Funktion die Definitionsmenge an, ermitteln Sie die Nullstelle, untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge und ermitteln Sie gegebenenfalls die Art und Lage des rel. Extremum.
   a) $f: x \mapsto \sqrt{2x-4}$
   b) $f: x \mapsto \sqrt{4x-x^2}$
   c) $f: x \mapsto \sqrt{2x+0,5x^2}$
   d) $f: x \mapsto \sqrt{e^{1-x^2}}$
   e) $f: x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{x+4}}$
   f) $f: x \mapsto x \cdot \sqrt{4-x}$
   g) $f: x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+4}}$
   h) $f: x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2+9}}$
   i) $f: x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$
   k) $f: x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2-9}}$

3.0 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\sqrt{x+\frac{4}{x}}$ und der Definitionsmenge $D_f =]0;\infty[$.

3.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge.

3.2 Zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstelle besitzt.

3.3 Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen der Funktion f an.

3.4 Ermitteln Sie die Art und Lage des relativen Extremum des Graphen der Funktion f.

3.5 Zeichnen Sie G_f für $0 < x \leq 16$.

4.0 *(Lk Infini II 2001)* Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_k : x \mapsto kx \cdot \sqrt{4-kx}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximaler Definitionsmenge D_k . Der Graph von g_k wird mit G_k bezeichnet.

4.1 Bestimmen Sie D_k, das Verhalten von g_k an den Rändern von D_k und die Nullstellen von g_k.

4.2 Bestätigen Sie, dass im Inneren von D_k gilt: $g_k'(x)=\dfrac{k(8-3kx)}{2\sqrt{4-kx}}$.

Bestimmen Sie den Kurvenpunkt mit horizontaler Tangente und berechnen Sie $g_k'(0)$

4.3 Begründen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass der in Aufgabe 1b ermittelte Kurvenpunkt Hochpunkt von G_k ist. Geben Sie die Wertemenge von g_k an.

4.4 Untersuchen Sie das Verhalten von g_k' bei Annäherung an den rechten Rand von D_k . Zeichnen Sie $G_{0,5}$ und G_1 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

30.3 Die etwas noch allgemeinere Wurzelfunktion

Wie läuft die Kurvendiskussion bei der Funktion

$$f : x \mapsto \sqrt[n]{g(x)} \quad \text{mit } n \in \mathbb{R}^+$$

i) Definitionsmenge: $D_f = \{x | g(x) \geq 0\}$

Ist n allerdings eine positive ganze ungerade Zahl, dann gilt: $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g$!

ii) Nullstelle: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0$

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung $g(x) = 0$.

iii) Extrema:

Um die erste Ableitung der Funktion f zu bilden schreiben wir die Funktion $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} = (g(x))^{\frac{1}{n}}$$

Nun wird nach der Kettenregel abgeleitet.

$$f'(x) = \tfrac{1}{n} \cdot (g(x))^{\frac{1}{n}-1} \cdot g'(x) = \tfrac{1}{n} \cdot g'(x) \cdot (g(x))^{\frac{1-n}{n}} = \tfrac{1}{n} \cdot g'(x) \cdot \sqrt[n]{(g(x))^{1-n}}$$

Ab hier geht´s dann wie gewohnt weiter. Die zweite Ableitung wird dann schon eine kleine Herausforderung.

Hier gibt´s keine Aufgaben!!!