2004 Aufgabe 2

1.0 Astronauten verlassen an Bord eines Raumschiffes die Erde und fliegen zum Mond. Das Raumschiff wird auf eine Kreisbahn um den Mond in der Höhe $h_1 = 110\,\text{km}$ über der Mondoberfläche gelenkt. Auf dieser Kreisbahn bewegt sich das Raumschiff antriebslos.
Die Masse des Mondes beträgt $m_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$, der Mondradius $r_M = 1{,}738 \cdot 10^{6}\,\text{m}$ und die Gravitationskonstante $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}$.

1.1 Zeigen Sie mit Hilfe des Gravitationsgesetzes, dass für den Betrag v_1 der Bahngeschwindigkeit des Raumschiffes gilt:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot m_M}{r_M + h_1}}$$

Berechnen Sie v_1.

$$F_Z = F_{Gr}$$

$$m_R \cdot \frac{v_1^2}{r} = G \cdot \frac{m_M \cdot m_R}{r^2}$$

$$v_1^2 = G \cdot \frac{m_M}{r}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot m_M}{r}} \quad \text{mit } r = r_M + h_1$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot m_M}{r_M + h_1}}$$

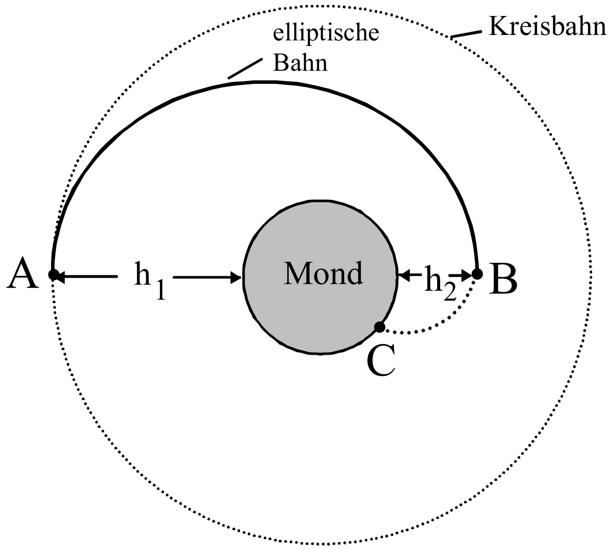
$$v_1 = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\text{kg}}{1{,}738 \cdot 10^{6}\,\text{m} + 1{,}10 \cdot 10^{5}\,\text{m}}} \approx 1{,}63\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

1.2 Berechnen Sie die Umlaufdauer T_1 des Raumschiffes.
$\left[\text{Ergebnis}: T_1 = 1{,}98\,\text{h}\right]$

$$v = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2\pi(r_M + h_1)}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2\pi(r_M + h_1)}{v_1}$$

$$T_1 = \frac{2\pi(r_M + h_1)}{v_1} = \frac{2\pi\left(1{,}738 \cdot 10^{6}\,\text{m} + 1{,}10 \cdot 10^{5}\,\text{m}\right)}{1{,}63 \cdot 10^{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 1{,}98\,\text{h}$$

1.3.0 Die Landefähre wird vom Kommandoteil des Raumschiffes abgekoppelt. Durch ein Steuermanöver wird die Landefähre von der Kreisbahn auf eine elliptische Bahn gelenkt. Zwischen dem mondfernsten Punkt A und dem mondnächsten Punkt B dieser elliptischen Bahn bewegt sich die Landefähre antriebslos. Im Punkt B befindet sich die Landefähre in der Höhe $h_2 = 14{,}6\,\text{km}$ über der Mondoberfläche. Siehe nebenstehende nicht maßstabsgetreue Skizze.



1.3.1 Berechnen Sie die große Halbachse der elliptischen Bahn und die Dauer des Fluges von A nach B.

Für die große Bahnhalbachse gilt:

$$2a = h_1 + 2r_M + h_2 \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{2}\left(h_1 + h_2\right) + r_M$$

$$a = \tfrac{1}{2}\left(1{,}10 \cdot 10^5\,\text{m} + 1{,}46 \cdot 10^4\,\text{m}\right) + 1{,}738 \cdot 10^6\,\text{m} \approx 1{,}80 \cdot 10^6\,\text{m}$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz gilt:

$$\frac{T_L^2}{a^3} = \frac{T_1^2}{\left(r_M + h_1\right)^3} \quad \Rightarrow \quad T_L^2 = \frac{a^3 \cdot T_1^2}{\left(r_M + h_1\right)^3} \quad \Rightarrow \quad T_L = T_1 \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\left(r_M + h_1\right)^3}}$$

Für den Flug von A nach B benötigt das Landeteil eine Zeit von:

$$t_L = \tfrac{1}{2} \cdot T_L = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}98\,\text{h} \cdot \sqrt{\frac{\left(1{,}80 \cdot 10^6\,\text{m}\right)^3}{\left(1{,}738 \cdot 10^6\,\text{m} + 1{,}10 \cdot 10^5\,\text{m}\right)^3}} \approx 0{,}952\,\text{h} \quad \left(57{,}1\,\text{min}\right)$$

1.3.2 Im Punkt B (siehe Skizze) leitet ein weiteres Steuermanöver die Landung auf der Mondoberfläche ein. Die Landefähre wird zunächst abgebremst. Dabei werden pro Sekunde Verbrennungsgase der Masse $m_{Gas} = 45\,\text{kg}$ in Bewegungsrichtung der Landefähre mit einer Geschwindigkeit vom Betrag $2{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ gegenüber der Fähre ausgestoßen.
Berechnen Sie den Betrag der Bremskraft, die durch den Ausstoß der Verbrennungsgase auf die Landefähre ausgeübt wird.
Erläutern Sie Ihren Lösungsansatz.

Werden Verbrennungsgase ausgestoßen so kommt es zu einer Impulsänderung $m_{Gas} \cdot \Delta v_{Gas}$. Dadurch erfährt die Landefähre den Kraftstoß $F_{Brems} \cdot \Delta t$.
Somit gilt:

$$F_{Brems} \cdot \Delta t = m_{Gas} \cdot \Delta v_{Gas}$$

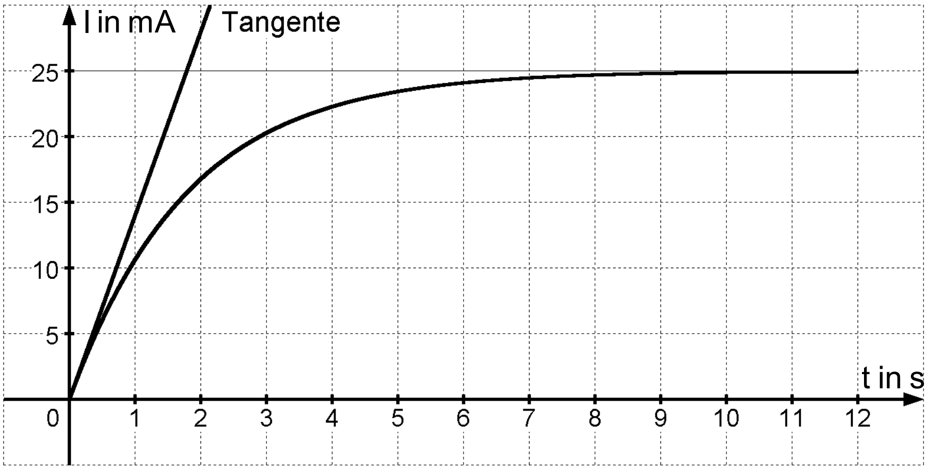
$$F_{Brems} = m_{Gas} \cdot \frac{\Delta v_{Gas}}{\Delta t} = 45\,\text{kg} \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}0\,\text{s}} \approx 1{,}1 \cdot 10^5\,\text{N}$$

1.3.3 Die Mondlandung ist gelungen. Die Astronauten verlassen die Landefähre und betreten die Mondoberfläche. Die Masse eines der Astronauten einschließlich seiner Ausrüstung beträgt $m_A = 135\,\text{kg}$.
Berechnen Sie unter Verwendung der für den Mond in 1.0 angegebenen Daten den Betrag der Gewichtskraft, die auf den Astronauten mit Ausrüstung wirkt.

Es gilt:

$$F_G = G \cdot \frac{m_M \cdot m_A}{r_M^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\,\text{kg} \cdot 135\,\text{kg}}{\left(1{,}738 \cdot 10^{6}\,\text{m}\right)^2} \approx 219\,\text{N}$$

2.0 Eine Spule mit geschlossenem Weicheisenkern besitzt die Induktivität L und den ohmschen Widerstand R_{Sp}. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ wird die Spule an eine Gleichspannungsquelle mit der Spannung $U_0 = 7{,}5\,\text{V}$ angeschlossen. Durch die Spule fließt ein Strom der Stärke I. Die Abhängigkeit der Stromstärke I von der Zeit t ist im unten stehenden Diagramm dargestellt.
Außerdem ist die Tangente an den Graphen für den Zeitpunkt $t_0 = 0\,\text{s}$ eingetragen.



2.1 Erklären Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke I.

2.2 Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms von 2.0 den ohmschen Widerstand R_{Sp} und die Induktivität L der Spule.

3.0 Die Spule mit dem ohmschen Widerstand $R_{sp} = 0{,}30\,\text{k}\Omega$ und der Induktivität $L = 540\,\text{H}$ ist an eine Wechselspannungsquelle mit der Spannung $U(t) = 7{,}5\,\text{V} \cdot \sin(100\pi\,\frac{1}{\text{s}} \cdot t)$ angeschlossen.

3.1 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass der induktive Widerstand X_L der Spule sehr viel größer ist als ihr ohmscher Widerstand.

3.2.0 In den folgenden Teilaufgaben soll der ohmsche Widerstand R_{Sp} der Spule gegenüber ihrem induktiven Widerstand X_L vernachlässigt werden.

3.2.1 Berechnen Sie den Scheitelwert der Stromstärke I_L im Wechselstromkreis und den maximalen Energieinhalt des magnetischen Feldes in der Spule.

3.2.2 Skizzieren Sie in einem Diagramm den zeitlichen Verlauf der Spannung U_L, die an der Spule anliegt, und den zeitlichen Verlauf der Stromstärke I_L für

$0\,\text{ms} \leq t \leq 20\,\text{ms}$.

Maßstab: $2{,}5\,\text{ms} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$; $2{,}5\,\text{V} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$; $10\,\mu\text{A} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$

3.2.3 Kennzeichnen Sie im Diagramm von Teilaufgabe 3.2.2 mit Farbe diejenigen Zeitintervalle, in denen die Spannungsquelle Energie an die Spule abgibt. Begründen Sie Ihre Lösung

3.2.4 Fertigen Sie eine beschriftete Schaltskizze zu einem Versuch an, mit dem die Phasenverschiebung zwischen der Spannung U_L an der Spule und der Stromstärke I_L sichtbar gemacht werden kann.
Begründen Sie, dass bei Ihrer Schaltung der zeitliche Verlauf von U_L und der von I_L dargestellt werden.